コンウェイのソリティア・アーミーの一般化について

櫻本　篤司[*1]　宮脇　悠司[*2]

（2010年 9 月28日　受付）

1　ソリティア・アーミーについて

1.1　ソリティア・アーミー

Conway のソリティア・アーミーとは，一般にペグソリティアと呼ばれるゲームと同じように，盤にピンを置き，その状態からピンの移動により，別の状態に移すことができるかどうかを調べるものである．ペグソリティアでは，図 1.1 の左図のように，盤に 32 本のピンを配置し，この状態からピンを右図のような配置にするのが一つの目的である．

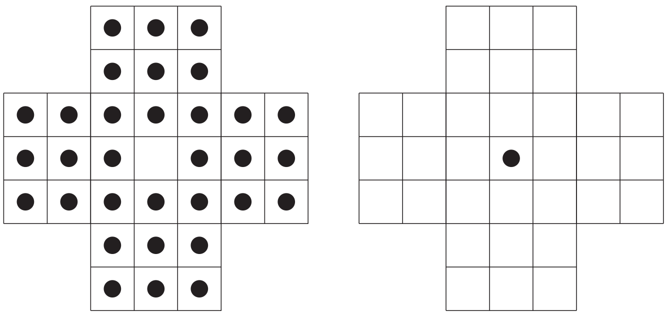


図 1.1　一般的なペグソリティア

このときのピンの移動は次のルールに従う．

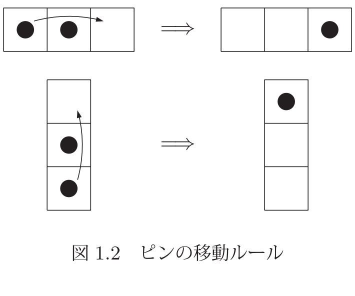


図 1.2　ピンの移動ルール

---

*[1]福井大学教育地域科学部理数教育講座　*[2]鯖江市東陽中学校

図 1.2 の様に縦または横に２つピンが並び，その隣が空いている場合，空いているマスの反対側にあるピンはその隣のピンを飛び越して空いているマスに移動できる．さらに，飛び越されたピンは盤上から取り除かれる．また，２つ以上のピンを飛び越すことや，斜めに移動することは出来ない．

ペグソリティアのルールはシンプルであるが，実際に手を動かしてみると意外と難しく，それが今まで多くの人々を夢中にさせてきた理由であろう．また，最初のピンの配置や最後にピンを残すマスの位置などの条件を変えると，移動が可能な場合と不可能な場合が存在することがわかる．これに対しては，ピンの配置に関する不変量などを導入することにより，実現可能な配置に対する条件がいくつか挙げられている．

一方，J. Conway が提起したソリティア・アーミーでは，図 1.3 のような無限に広がる盤を用いる．図の太線で表示した直線は基準線で，その上側は砂漠とし，下側には軍隊があるとする．そして軍隊のある側のマスには兵士（ピン）をいくらでも（ただし有限個とする）配置できるが，１つのマスには１人の兵士しか置けないとする．また兵士の移動は，図 1.2 で示したピンの移動ルールに従うものとする．

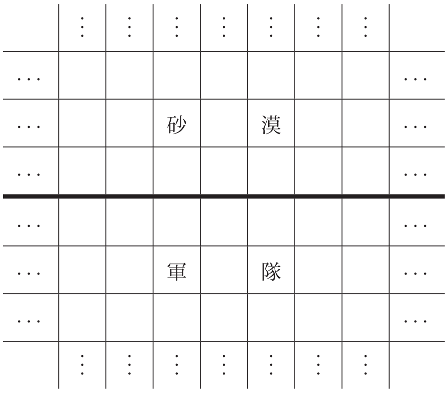


図 1.3　Conway のソリティア・アーミーの盤

ソリティア・アーミーでは，砂漠のどのレベルまで兵士を送り込むことが出来るか，また送り込むことが可能な場合，１人の兵士を送り込むのに必要な最少の兵士の数は何人であるかを調べる．

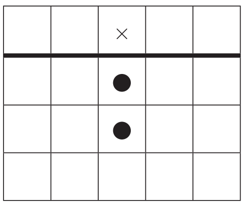


図 1.4　１段目の最小配置

例えば基準線のすぐ上の段（1 段目）に兵士 1 人を送り込む場合は図 1.4 の様に 2 人の兵士を配置すればよい．下の兵士が上の兵士を飛び越すことによって砂漠の 1 段目 (×) に到達できる．基準線の下に何人でも兵士を配置できるのであれば，いくらでも遠くに兵士を送り込めるように思われるが，実際には限界がある．

J. Conway は 5 段目以上には兵士を送り込むことが出来ないこと，また 1, 2, 3, 4 段目に兵士を送り込むために必要な兵士の最小人数がそれぞれ 2, 4, 8, 20 であることなどを示した ([2])．その後，ソリティア・アーミーは，移動の方向や盤の形などの条件を変えて，さまざまな研究がなされ，多くの結果が得られている ([1],[3])．

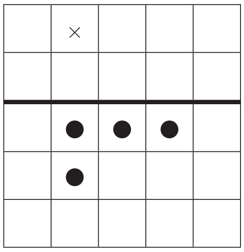


図 1.5　2 段目の最小配置

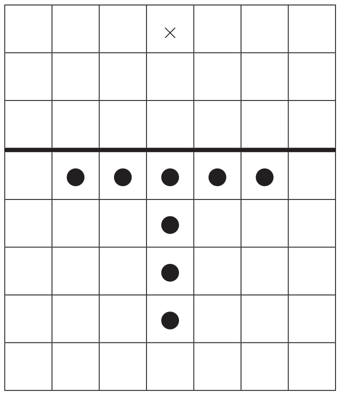


図 1.6　3 段目の最小配置

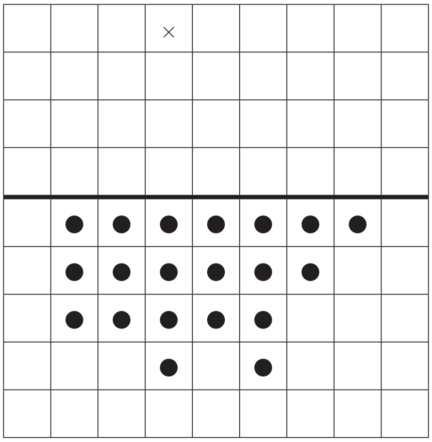


図 1.7　4 段目の最小配置

1.2　パゴダ関数

Conway のソリティア・アーミーにおいて，砂漠の 5 段目以上に兵士（ピン）を送ることが出来ないことを証明するのにパゴダ関数が重要な役割を果たした．パゴダ関数とは各マスに数を対応させたもので，ピンのあるマスの数値の和が，ピンの移動により増加しないもののことである．ここで，Conway が用いたパゴダ関数を図 1.8 に示す．ただし，σ は $\sigma^2+\sigma=1$ を満たす正の実数，すなわち $\sigma=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 0.62$ で，この σ はこの後何度も利用する．図 1.8 のパゴダ関数の値はすべて σ^n の形をしているが，この n は σ^0 のマスから右または左に k マス，下に l マス移動したマスでは $n=k+l$ となっている．

$\cdots$	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	$\cdots$
$\cdots$	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	$\cdots$
$\cdots$	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	$\cdots$
$\cdots$	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	$\cdots$
$\cdots$	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	$\cdots$
$\cdots$	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	$\cdots$
$\cdots$	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	$\cdots$
$\cdots$	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

図 1.8　Conway の用いたパゴダ関数

ここで，この関数がパゴダ関数になっていること，つまり，ピンの移動によって関数の値の和が増加しないことを示す．移動の前後でピンの有無が変化するのは 3 つのマスだけであるからその 3 つのマスにのみ注目すればよい．

ここで，ピンの移動を関数の値を利用して表すこととする．具体的には，関数の値が p のマスにあるピンが q のマスのピンを飛び越えて，r のマスに移動することを $p+q\to r$ によって表すことにする．

$$\boxed{\sigma^8 \mid \sigma^7 \mid \sigma^6} \Longrightarrow \boxed{\sigma^8 \mid \sigma^7 \mid \sigma^6}$$

例えば，上の図のように σ^8,σ^7 のマスにピンがあり，σ^8 のマスにあるピンが σ^7 のマスにあるピンを飛び越えて，σ^6 のマスに移動したとすると，この移動は $\sigma^8+\sigma^7\to\sigma^6$ と表すことができる．この時，ピンのあるマスの関数の値の和は，移動前は $\sigma^8+\sigma^7$，移動後は σ^6 である．こ

こで，σ の定義より

$$\sigma^8 + \sigma^7 = \sigma^6(\sigma^2 + \sigma) = \sigma^6$$

となり，この移動では関数の和が変化しないことがわかる．その他の移動についても考えると，図 1.8 でのピンの移動は次の 3 つに分類することが出来る．

$$\begin{aligned} M_1: &\quad \sigma^{n+2} + \sigma^{n+1} \to \sigma^n \\ M_2: &\quad \sigma^n + \sigma^{n+1} \to \sigma^{n+2} \\ M_3: &\quad \sigma^{n+1} + \sigma^n \to \sigma^{n+1} \end{aligned}$$

そこで，それぞれの移動において関数の値の和が増加しないことを示す．M_1 の場合は

$$\sigma^{n+2} + \sigma^{n+1} = \sigma^n(\sigma^2 + \sigma) = \sigma^n$$

より関数の和は変化しない．次に，M_2, M_3 の場合は，$0 < \sigma < 1$ より，σ^k は k について単調減少で，$\sigma^n > 0$ であるから

$$\sigma^n + \sigma^{n+1} > \sigma^{n+2}, \quad \sigma^{n+1} + \sigma^n > \sigma^{n+1}$$

となり，どちらの移動でも関数の和は減少する．従って，すべての移動で関数の和が増加しないので，図 1.8 の関数はパゴダ関数である．

次に，この論文で用いるパゴダ関数を挙げ，各移動により関数の和がどのように変化するかを見ていく．

例 1.1.

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}

この場合は，ピンの移動は M_1, M_2 の他に

$$M_4: \quad \sigma^{n+1} + \sigma^n \to \sigma^n \qquad\qquad M_5: \quad \sigma^n + \sigma^n \to \sigma^{n+1}$$

の 2 種類があるが，どちらの場合も関数の和は減少するのでパゴダ関数となっている．

例 1.2.

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}

この場合は，ピンの移動は M_1, M_2 の他に

$$M_6: \quad 0+0 \to 0 \qquad\qquad M_7: \quad \sigma^{n+1}+\sigma^n \to 0$$
$$M_8: \quad 0+\sigma^n \to \sigma^{n+1} \qquad\qquad M_9: \quad \sigma^n+0 \to \sigma^n$$

の 4 種類あるが，M_6, M_9 の場合は関数の和は変化せず，M_7, M_8 の場合は関数の値が減少する．

例 1.3.

σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	$\frac{\sigma^0}{2}$	$\frac{\sigma^0}{2}$	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3
σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	$\frac{\sigma^1}{2}$	$\frac{\sigma^1}{2}$	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	$\frac{\sigma^2}{2}$	$\frac{\sigma^2}{2}$	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	$\frac{\sigma^3}{2}$	$\frac{\sigma^3}{2}$	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	$\frac{\sigma^4}{2}$	$\frac{\sigma^4}{2}$	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	$\frac{\sigma^5}{2}$	$\frac{\sigma^5}{2}$	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	$\frac{\sigma^6}{2}$	$\frac{\sigma^6}{2}$	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9

この場合は，ピンの移動は M_1, M_2 の他に

$$M_{10}: \quad \sigma^{n+1}+\sigma^n \to \frac{\sigma^n}{2} \qquad\qquad M_{11}: \quad \frac{\sigma^n}{2}+\sigma^n \to \sigma^{n+1}$$
$$M_{12}: \quad \frac{\sigma^{n+2}}{2}+\frac{\sigma^{n+1}}{2} \to \frac{\sigma^n}{2} \qquad\qquad M_{13}: \quad \frac{\sigma^n}{2}+\frac{\sigma^{n+1}}{2} \to \frac{\sigma^{n+2}}{2}$$
$$M_{14}: \quad \sigma^n+\frac{\sigma^n}{2} \to \frac{\sigma^n}{2} \qquad\qquad M_{15}: \quad \frac{\sigma^n}{2}+\frac{\sigma^n}{2} \to \sigma^n$$

の 6 種類あるが，M_{12}, M_{15} の場合は関数の和は変化せず，それ以外の 4 種類の場合は関数の値が減少する．

例 1.4.

σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3
σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9

この場合は，ピンの移動は $M_1, M_2, M_6 \sim M_9$ の他に

$$M_{16}: \quad 0 + \sigma^n \to 0$$

があるが，この移動では関数の値が減少する．

例 1.5.

$\{F_n\}$ を $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ により定まるフィボナッチ数列とし，右及び上方向に広がる盤のマスに以下のように値を定める．（左，下の太線は盤の端を意味する．）

$F_6\sigma^0$	$F_6\sigma^1$	$F_6\sigma^2$	$F_6\sigma^3$	$F_6\sigma^4$	$F_6\sigma^5$
$F_5\sigma^0$	$F_5\sigma^1$	$F_5\sigma^2$	$F_5\sigma^3$	$F_5\sigma^4$	$F_5\sigma^5$
$F_4\sigma^0$	$F_4\sigma^1$	$F_4\sigma^2$	$F_4\sigma^3$	$F_4\sigma^4$	$F_4\sigma^5$
$F_3\sigma^0$	$F_3\sigma^1$	$F_3\sigma^2$	$F_3\sigma^3$	$F_3\sigma^4$	$F_3\sigma^5$
$F_2\sigma^0$	$F_2\sigma^1$	$F_2\sigma^2$	$F_2\sigma^3$	$F_2\sigma^4$	$F_2\sigma^5$
$F_1\sigma^0$	$F_1\sigma^1$	$F_1\sigma^2$	$F_1\sigma^3$	$F_1\sigma^4$	$F_1\sigma^5$
$F_0\sigma^0$	$F_0\sigma^1$	$F_0\sigma^2$	$F_0\sigma^3$	$F_0\sigma^4$	$F_0\sigma^5$

この場合は，ピンの移動は

$$M_{17}: \quad F_m\sigma^{n+2} + F_m\sigma^{n+1} \to F_m\sigma^n \qquad M_{18}: \quad F_m\sigma^n + F_m\sigma^{n+1} \to F_m\sigma^{n+2}$$
$$M_{19}: \quad F_m\sigma^n + F_{m+1}\sigma^n \to F_{m+2}\sigma^n \qquad M_{20}: \quad F_{m+2}\sigma^n + F_{m+1}\sigma^n \to F_m\sigma^n$$

の 4 種類あり，$F_m + F_{m+1} = F_{m+2}$，$\sigma^{n+2} + \sigma^{n+1} = \sigma^n$ より M_{17}, M_{19} では関数の和は変化しない．一方，M_{18}, M_{20} では，$\sigma^n + \sigma^{n+1} > \sigma^{n+2}$，$F_{m+2} + F_{m+1} > F_m$ より関数の和が減少

する．

これまでに，20 種類のピンの移動を示したが，この中でパゴダ関数の和が変化しないのは $M_1, M_6, M_9, M_{12}, M_{15}, M_{17}, M_{19}$ の 7 種類であり，残りの 13 種類の移動では和が減少する．

2　ソリティア・アーミーの一般化

2.1　一般化

Conway のソリティア・アーミーでは 1 つのピン（兵士）を砂漠の n 段目に移動させることを考えたが，これを一般化して，図 2.1,2.2 のように複数のピンを砂漠に移動させることを考える．

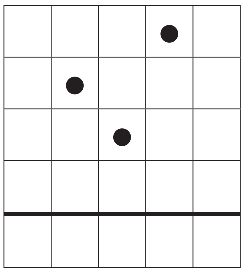


図 2.1

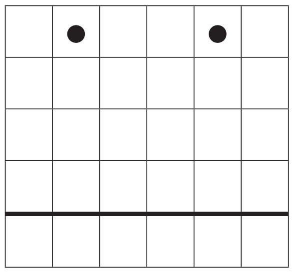


図 2.2

ここで，目的となる砂漠側に配置するピンの位置が，左から順に n_1 段目，n_2 段目，$\cdots$, n_k 段目の場合，その一般化されたソリティア・アーミーを $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 型のソリティア・アーミーと呼ぶことにする．また，左から i 列目にピンを置かないときは $n_i = 0$ とする．すると，図 2.1 の場合は $(3, 2, 4)$ 型，図 2.2 の場合は $(4, 0, 0, 4)$ 型となる．また，この記法を用いると Conway のソリティア・アーミーは (n) 型と表すことができる．

Conway の結果から 5 段目以上にピンを移動させることは出来ないので，$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 型のソリティア・アーミーのうち $n_i \leq 4$ $(1 \leq i \leq k)$ を満たすものだけを調べればよい．

本論文では，n 段目に 2 つのピンを置くソリティア・アーミー，すなわち $(n, 0, \cdots, 0, n)$ 型について調べる．ここで，0 以上の整数 k に対して，$(n, \overbrace{0, \cdots, 0}^{k}, n)$ 型を $\mathrm{II}(n, k)$ 型と呼ぶことにする．$k = 0$ の場合，すなわち $\mathrm{II}(n, 0)$ 型は (n, n) 型のことである．

$\mathrm{II}(n, k)$ 型のソリティア・アーミーにおいては，n 段目に置く 2 つのピンの位置が離れていれば本質的に Conway のソリティア・アーミーと変わらないが，ピンの位置が近い場合は，移動に必要なピンを置くマスを奪い合うことになるので最小個数は増加すると予想され，場合によっては実現不可能となることもあり得る．従って，k の値が小さい場合が最も注目されることとなる．

2.2 最小個数

次に，ソリティア・アーミーが可能である時，初期配置のピンの最小個数について考える．

Conway のソリティア・アーミーにおいて n 段の場合の最小個数を MS_n とすると，

$$\mathrm{MS}_1 = 2,\ \mathrm{MS}_2 = 4,\ \mathrm{MS}_3 = 8,\ \mathrm{MS}_4 = 20$$

である．また，$\mathrm{II}(n,k)$ の場合の最小個数を $\mathrm{MS}(n,k)$ とおくと，n 段目に 1 つのピンを移動させるのに少なくとも MS_n 本のピンが必要なので，$\mathrm{MS}(n,k) \geq 2\mathrm{MS}_n$ となる．

ここで，$n=1$ の場合を考えると，$\mathrm{MS}(1,k) \geq 2\mathrm{MS}_1 = 4$ となる．また，Conway のソリティア・アーミーの 1 段目の場合 ((1) 型) の最小配置 (図 1.4) を，図 2.3 のように 2 つの列に配置すれば 4 本のピンで $\mathrm{II}(1,k)$ 型が実現できることがわかる．従って，$\mathrm{MS}(1,k) = 4$ である．

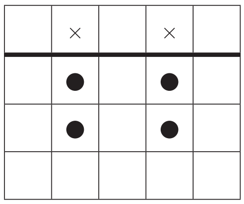


図 2.3　$\mathrm{II}(1,1)$ 型の最小配置

次に，$n=2$ の場合を考えると

$$\mathrm{MS}(2,k) \geq 2\mathrm{MS}_2 = 8$$

となる．この場合も $n=1$ の時と同様に (2) 型の最小配置 (図 1.5) を 2 つ並べることによって $\mathrm{II}(2,k)$ が実現できる．ただし，そのまま 2 つ並べると k が 1 以下の場合はピンが重なってしまうので，図 2.4 のように，一方は図 1.5 の左右を入れ替えたものを使う必要がある．

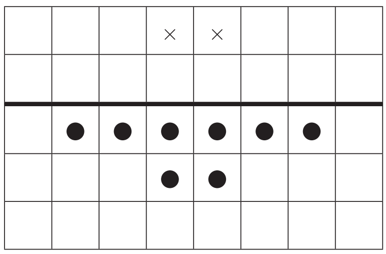


図 2.4　$\mathrm{II}(2,0)$ 型の最小配置

この方法は，$n=3,4$ の場合も使うことが出来るが，(3) 型，(4) 型の最小配置の左右を入れ替えても，k の値が小さい時はピンが重なってしまうので，$k \geq 4$ の場合にしか使えない．従って，$k \geq 4$ の時，

$$\mathrm{MS}(3,k) = 2\mathrm{MS}_3 = 16,\quad \mathrm{MS}(4,k) = 2\mathrm{MS}_4 = 40$$

である．

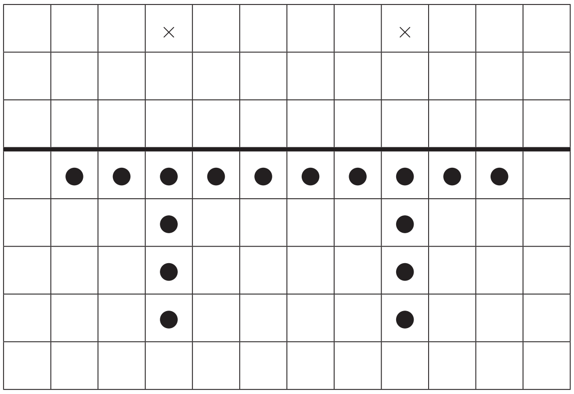


図 2.5　II$(3,4)$ 型の最小配置

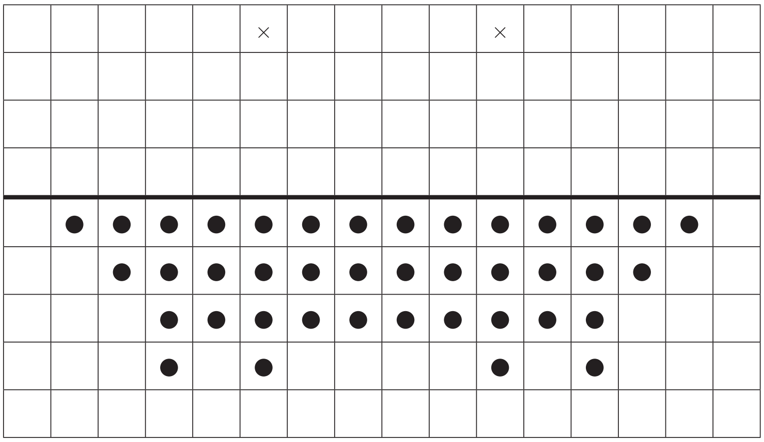


図 2.6　II$(4,4)$ 型の最小配置

以上のことから，II(n,k) 型の最小個数 MS(n,k) について次が成立する．

定理 2.1.

(1) 非負整数 k に対して，MS$(1,k)=4$, MS$(2,k)=8$

(2) $k \geq 4$ の時，MS$(3,k)=16$, MS$(4,k)=40$

3　II$(3,k)$ 型のソリティア・アーミー

ここでは，II$(3,k)$ 型のソリティア・アーミーが可能かどうか，また可能な場合は最小個数 MS$(3,k)$ についても調べる．

3.1　II(3, 0) 型

図の太線（基準線）から下にピンを配置して，基準線から上へ 3 段目の隣り合う 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるかを考える．

			c_l	c_r			

ここで，パゴダ関数 pag として例 1.1 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}

ここで，実数 p に対して，基準線から下にあるマスの中で，パゴダ関数の値が p のマスの数を $N(p)$, p 以上のマスの数を $N_+(p)$ とおく．さらに，値が p 以上のマスのパゴダ関数の値の総和を $S_+(p)$ とおく．すなわち，$S_+(p) = \sum_{q \geq p} qN(q)$ とする．

c_l, c_r の 2 つのマスにピンが移動できたとすると，その時のパゴダ関数の和は 2 であるから，最初の配置（初期配置）でのパゴダ関数の和も 2 以上である．

これを利用して必要なピンの最小個数を求める．σ^k は k に関して単調減少だから，基準線より下にあるマスのパゴダ関数の値を大きいものから順に並べると，$\sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \cdots$ となり，またそれぞれの値を $a\sigma + b$ で表した時の形や $N(p), N_+(p), S_+(p)$ を表にまとめると次のようになる．

p	$a\sigma+b$	$N(p)$	$N_+(p)$	$S_+(p)$
σ^3	$2\sigma-1$	2	2	$4\sigma-2 = 0.472135\cdots$
σ^4	$-3\sigma+2$	4	6	$-8\sigma+6 = 1.055728\cdots$
σ^5	$5\sigma-3$	6	12	$22\sigma-12 = 1.596747\cdots$
σ^6	$-8\sigma+5$	8	20	$-42\sigma+28 = 2.042572\cdots$

この表から，σ^6 以上の 20 個のマスにピンを配置すればパゴダ関数の和が 2 を超えることがわかる．ここで，$\sigma^6 = 0.055\cdots$ より，パゴダ関数の値が一番小さい σ^6 のマスのピンを 1 本でも減らすと和は 2 未満となるので，最小個数は 20 以上である．

また，20 個のピンを図 3.1 のように配置すると，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることができるので，$\mathrm{MS}(3,0) = 20$ である．

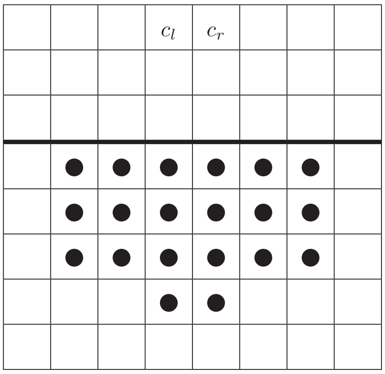
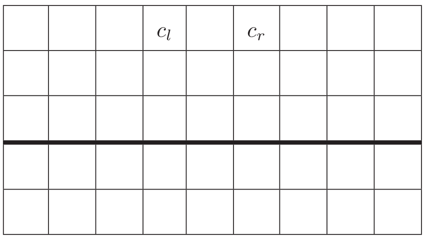


図 3.1　II$(3,0)$ 型の最小配置

3.2　II$(3,1)$ 型

基準線から上へ 3 段目の 1 つ離れたマス c_l, c_r にピンを移動させることができる初期配置のピンの最小個数を求める．



ここで，パゴダ関数 pag として例 1.2 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	0	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}

このパゴダ関数は II(3, 0) 型で用いたパゴダ関数に 0 の列が加わっただけなので，初期配置に必要なピンの数は II(3, 0) 型の場合と同様にして 20 個以上であることがわかる．

また，II(3, 0) 型の最小配置を利用して，図 3.2 のように 20 個のピンを配置すると，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることができるので，$\mathrm{MS}(3, 1) = 20$ である．

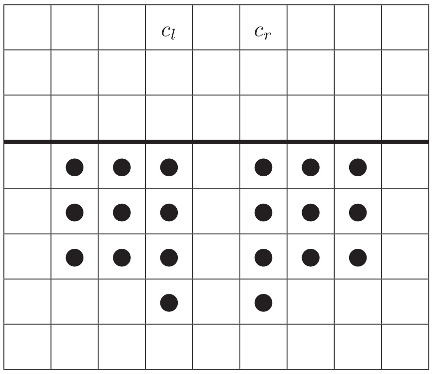
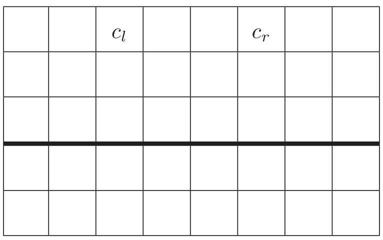


図 3.2　II(3, 1) 型の最小配置

3.3　II(3, 2) 型

基準線から上へ 3 段目の 2 つ離れた 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができる初期配置のピンの最小個数を求める．



ここで，パゴダ関数 pag として例 1.3 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	$\frac{\sigma^0}{2}$	$\frac{\sigma^0}{2}$	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3
σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	$\frac{\sigma^1}{2}$	$\frac{\sigma^1}{2}$	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	$\frac{\sigma^2}{2}$	$\frac{\sigma^2}{2}$	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	$\frac{\sigma^3}{2}$	$\frac{\sigma^3}{2}$	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	$\frac{\sigma^4}{2}$	$\frac{\sigma^4}{2}$	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	$\frac{\sigma^5}{2}$	$\frac{\sigma^5}{2}$	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	$\frac{\sigma^6}{2}$	$\frac{\sigma^6}{2}$	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	$\frac{\sigma^7}{2}$	$\frac{\sigma^7}{2}$	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}

初期配置のパゴダ関数の値の和は 2 以上であるので，それを利用して必要なピンの最小個数を求める．基準線より下にあるマスのパゴダ関数の値を大きいものから順に並べると，

$$\sigma^3 > \sigma^4 > \frac{\sigma^3}{2} > \sigma^5 > \frac{\sigma^4}{2} > \sigma^6 > \frac{\sigma^5}{2} > \cdots > \sigma^k > \frac{\sigma^{k-1}}{2} > \sigma^{k+1} > \cdots$$

となり，またそれぞれの値を $a\sigma + b$ で表した時の形や $N(p), N_+(p), S_+(p)$ を表にまとめると以下のようになる．

p	$a\sigma + b$	$N(p)$	$N_+(p)$	$S_+(p)$
σ^3	$2\sigma - 1$	2	2	$4\sigma - 2 = 0.472135\cdots$
σ^4	$-3\sigma + 2$	4	6	$-8\sigma + 6 = 1.055728\cdots$
$\frac{\sigma^3}{2}$	$\sigma - \frac{1}{2}$	2	8	$-6\sigma + 5 = 1.291796\cdots$
σ^5	$5\sigma - 3$	6	14	$24\sigma - 13 = 1.832815\cdots$
$\frac{\sigma^4}{2}$	$-\frac{3}{2}\sigma + 1$	2	16	$21\sigma - 11 = 1.978713\cdots$
σ^6	$-8\sigma + 5$	8	24	$-43\sigma + 29 = 2.424538\cdots$

この表から，必要なピンの最小個数は 16 より大きいことがいえる．また，$\sigma^6 = 0.055\cdots$ であるから，$S_+(\frac{\sigma^4}{2}) + \sigma^6 > 2$ となり，最小個数は 17 以上である．

一方，17 個のピンを図 3.3 のように配置すると，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることができるので，$\mathrm{MS}(3,2) = 17$ である．

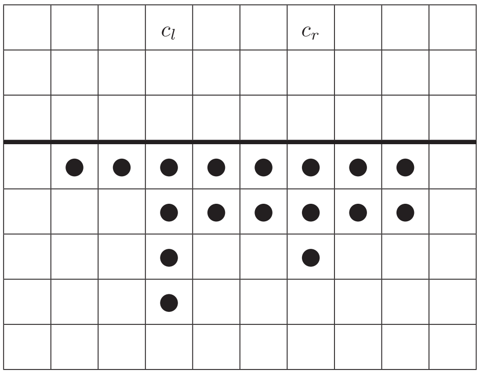
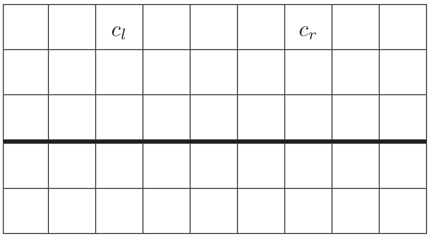


図 3.3　II(3, 2) 型の最小配置

3.4　II(3, 3) 型

基準線から上へ 3 段目の 3 つ離れた 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができる初期配置のピンの最小個数を求める.



ここで，パゴダ関数 pag として例 1.4 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める.

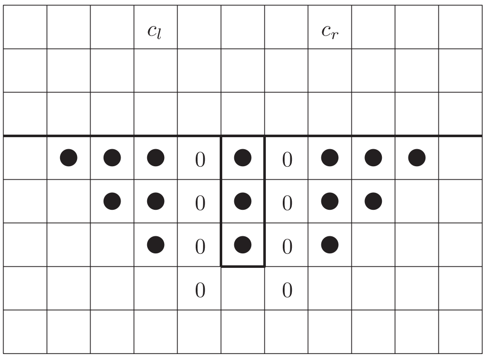
σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3
σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	0	σ^7	0	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}

初期配置のパゴダ関数の値の和は 2 以上であるので，それを利用して必要なピンの最小個数を求める．σ^k は k に関して単調減少だから，基準線より下にあるマスのパゴダ関数の値を大きいものから順に並べると，$\sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \cdots$ となり，またそれぞれの値を $a\sigma + b$ で表した時の形や $N(p), N_+(p), S_+(p)$ を表にまとめると以下のようになる．

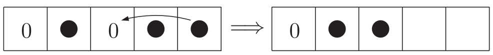
p	$a\sigma+b$	$N(p)$	$N_+(p)$	$S_+(p)$
σ^3	$2\sigma-1$	3	3	$6\sigma-3 \;=\; 0.708203\cdots$
σ^4	$-3\sigma+2$	5	8	$-9\sigma+7 \;=\; 1.437694\cdots$
σ^5	$5\sigma-3$	7	15	$26\sigma-14 \;=\; 2.068883\cdots$

この表から，σ^5 以上の 15 個のマスにピンを配置すればパゴダ関数の和が 2 を超えることがわかる．ここで，$\sigma^5 = 0.0901\cdots$ より，パゴダ関数の値が一番小さい σ^5 のマスのピンを 1 本でも減らすと和は 2 未満となるので，最小個数は 15 以上である．

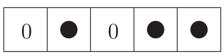
また，σ^5 以上の 15 個のマスにピンをおく場合の配置は次のようになる．



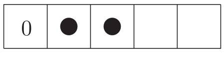
図のピンはすべて，c_r か c_l と同じ列に移動する，または飛び越されることによって取り除かれるのであるが，太枠内のマスにあるピンが左右どちらかに移動するか飛び越されるためには 0 のマスにピンが必要となる．図の状態から 0 のマスにピンを移動させようとすると，以下の移動が必要となる．



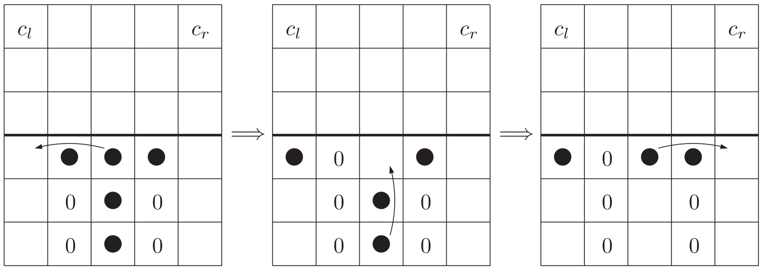
しかし，この場合は最初の配置において



の部分を



に変更した方がピンの数は少なくなるので，ピンの個数が最小の配置では 0 のマスにピンが必要となる．ここで，0 のマスに何個のピンが必要かを考えると，以下のように少なくとも 2 個必要である．



すると，0 以外のマスに 15 個，0 のマスに 2 個のピンが必要となり，この場合は 17 個のピンが必要となる．

ここで，0 のマスのピンも含めて 16 個以下のピンの配置で，パゴダ関数の和が 2 以上となる配置を考える．パゴダ関数の和が 2 以上となる為には 0 以外のマスにピンが 15 個以上必要であるので，0 のマスのピンは 1 個以下となる．0 のマスのピンが 0 個の場合は，0 にはさまれたマスにはピンを置くことができないので，$\sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$ のマスにはそれぞれ $2, 4, 6, 8$ 個以下のピンを置くことになる．パゴダ関数の値が大きい方から 16 個のマスの和を求めると

$$2\sigma^3 + 4\sigma^4 + 6\sigma^5 + 4\sigma^6 = -10\sigma + 8 = 1.8196\cdots$$

となり，16 個以下では和が 2 以上とならないことがわかる．

次に，0 のマスのピンが 1 個の場合を考える．この場合は，0 以外のマスにはピンが 15 個しか置けない．また，0 にはさまれたマスにピンを置いたとき，パゴダ関数の和が最大でかつピンの個数が最小となるのは σ^3 のマスだけにピンを置いたときである．それ以外の 0 にはさまれたマスにはピンが置けないので，この場合は $\sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$ のマスにはそれぞれ $3, 4, 6, 8$ 個以下のピンを置くことになる．パゴダ関数の値が大きい方から 15 個のマスの値の和を求めると

$$3\sigma^3 + 4\sigma^4 + 6\sigma^5 + 2\sigma^6 = 8\sigma - 3 = 1.9442\cdots$$

となり，この場合も 2 以上とならない．

以上のことから，最小個数は 17 以上である．一方，17 個のピンを図 3.4 のように配置すると，c_r, c_l の 2 つのマスにピンを移動させることができるので，$\mathrm{MS}(3,3) = 17$ である．

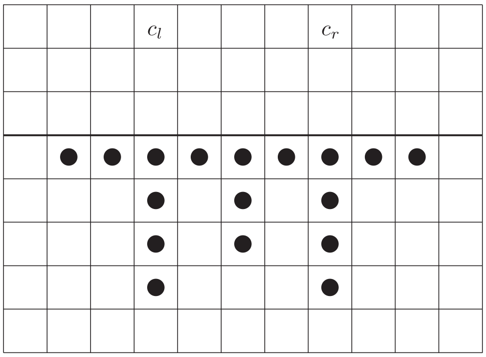


図 3.4　II(3, 3) 型の最小配置

3.5　II$(3, k)$ 型の最小個数

3.1～3.4 と定理 2.1 より，II$(3, k)$ 型の最小個数について次が成立する．

定理 3.1.

(1) $\mathrm{MS}(3, 0) = \mathrm{MS}(3, 1) = 20$

(2) $\mathrm{MS}(3, 2) = \mathrm{MS}(3, 3) = 17$

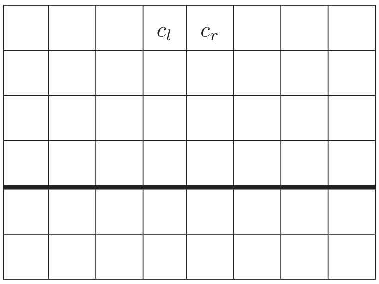
(3) $k \geq 4$ に対して，$\mathrm{MS}(3, k) = 16$

4　II$(4, k)$ 型のソリティア・アーミー

ここでは，II$(4, k)$ 型のソリティア・アーミーが可能かどうか，また可能な場合は最小個数 $\mathrm{MS}(4, k)$ についても調べる．

4.1　II$(4, 0)$ 型

図の太線（基準線）から下にピンを配置して，基準線から上へ 4 段目の隣り合う 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるかを考える．



ここで，パゴダ関数 pag として例 1.1 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}

c_l, c_r の 2 つのマスにピンが移動できたとすると，その時のパゴダ関数の和は 2 であるから，初期配置でのパゴダ関数の和も 2 以上である．

ここで，基準線から下のすべてのマスのパゴダ関数の和を求める．このパゴダ関数は左右対称であるので右半分の和を計算する．

σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	$\cdots$
σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	$\cdots$
σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	$\cdots$
σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	$\cdots$
σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	$\cdots$
σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	σ^{13}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

上の図で左から k 列目のマスのパゴダ関数の和を S_k とおくと

$$S_k = \sigma^{k+3} + \sigma^{k+4} + \sigma^{k+5} + \cdots = \frac{\sigma^{k+3}}{1-\sigma} = \sigma^{k+1}$$

となるので，右半分のパゴダ関数の和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{k+1} = \frac{\sigma^2}{1-\sigma} = 1$$

である．よって，左半分の和も 1 となり，基準線より下のすべてのマスのパゴダ関数の和は 2 となるが，ここでは有限個のマスにピンを置く場合を考えているので，パゴダ関数の和は 2 より小さくなる．

従って，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることはできない．

4.2　II$(4,1)$ 型

図の太線（基準線）から下にピンを配置して，基準線から上へ 4 段目の 1 つ離れた 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるかを考える．

			c_l		c_r			

ここで，パゴダ関数 pag として例 1.2 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	0	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	0	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}

c_r, c_l の 2 つのマスにピンが移動できたとすると，その時のパゴダ関数の和は 2 であるから，最初の配置でのパゴダ関数の和も 2 以上である．このパゴダ関数は II$(4,0)$ 型で用いたパゴダ関数に 0 の列を入れただけなので，基準線から下のすべてのマスのパゴダ関数の和は II$(4,0)$ 型の場合と同じく 2 となる．この和は無限個のマスにピンを配置した場合であり，今は有限個のマスにピンを置く場合を考えているので，有限個のピンの配置ではパゴダ関数の和は 2 より小さく

なる．

従って，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることはできない．

4.3　II$(4,2)$ 型

図の太線（基準線）から下にピンを配置して，基準線から上へ 4 段目の 2 つ離れた 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるかを考える．

		c_l			c_r		

ここで，パゴダ関数 pag として例 1.3 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	$\frac{\sigma^0}{2}$	$\frac{\sigma^0}{2}$	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	$\frac{\sigma^1}{2}$	$\frac{\sigma^1}{2}$	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	$\frac{\sigma^2}{2}$	$\frac{\sigma^2}{2}$	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	$\frac{\sigma^3}{2}$	$\frac{\sigma^3}{2}$	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	$\frac{\sigma^4}{2}$	$\frac{\sigma^4}{2}$	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	$\frac{\sigma^5}{2}$	$\frac{\sigma^5}{2}$	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	$\frac{\sigma^6}{2}$	$\frac{\sigma^6}{2}$	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	$\frac{\sigma^7}{2}$	$\frac{\sigma^7}{2}$	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	$\frac{\sigma^8}{2}$	$\frac{\sigma^8}{2}$	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}
σ^{13}	σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	$\frac{\sigma^9}{2}$	$\frac{\sigma^9}{2}$	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	σ^{13}

初期配置のパゴダ関数の値の和は 2 以上であるので，それを利用して必要なピンの最小個数を求める．基準線より下にあるマスのパゴダ関数の値を大きいものから順に並べると，

$$\sigma^4 > \sigma^5 > \frac{\sigma^4}{2} > \sigma^6 > \frac{\sigma^5}{2} > \sigma^7 > \frac{\sigma^6}{2} > \cdots > \sigma^k > \frac{\sigma^{k-1}}{2} > \sigma^{k+1} > \cdots$$

となり，それぞれの値を $a\sigma + b$ で表した時の形や $N(p), N_+(p), S_+(p)$ を表にまとめると次のようになる．

p	$a\sigma+b$	$N(p)$	$N_+(p)$	$S_+(p)$
σ^4	$-3\sigma+2$	2	2	$-6\sigma+4 = 0.291796\cdots$
σ^5	$5\sigma-3$	4	6	$14\sigma-8 = 0.652475\cdots$
$\frac{\sigma^4}{2}$	$-\frac{3}{2}\sigma+1$	2	8	$11\sigma-6 = 0.798373\cdots$
σ^6	$-8\sigma+5$	6	14	$-37\sigma+24 = 1.132742\cdots$
$\frac{\sigma^5}{2}$	$\frac{5}{2}\sigma-\frac{3}{2}$	2	16	$-32\sigma+21 = 1.222912\cdots$
σ^7	$13\sigma-8$	8	24	$72\sigma-43 = 1.498447\cdots$
$\frac{\sigma^6}{2}$	$-4\sigma+\frac{5}{2}$	2	26	$64\sigma-38 = 1.554175\cdots$
σ^8	$-21\sigma+13$	10	36	$-146\sigma+92 = 1.767037\cdots$
$\frac{\sigma^7}{2}$	$\frac{13}{2}\sigma-4$	2	38	$-133\sigma+84 = 1.801479\cdots$
σ^9	$34\sigma-21$	12	50	$275\sigma-168 = 1.959346\cdots$
$\frac{\sigma^8}{2}$	$-\frac{21}{2}\sigma+\frac{13}{2}$	2	52	$254\sigma-155 = 1.980633\cdots$
σ^{10}	$-55\sigma+34$	14	66	$-516\sigma+321 = 2.094461\cdots$

この表から，必要なピンの最小個数は 52 よりも大きいことがいえる．$S_+(\frac{\sigma^8}{2})+k\sigma^{10}\geq 2$ となる自然数 k の最小値を求めると

$$254\sigma-155+k(-55\sigma+34)\geq 2$$

$$k\geq\frac{157-254\sigma}{-55\sigma+34}=2.38\cdots$$

よって，k の最小値は 3 となり最小個数は 55 以上である．

次に，55 個のピンの配置によって実現可能かどうかを調べる．まず，55 個のピンでパゴダ関数の値の和が最大となるのは，$\mathrm{pag}(c)\geq\frac{\sigma^8}{2}$ となるマス c にすべてピンを配置し，さらに σ^{10} のマスにピンを 3 個配置した場合で，そのときの値を S_0 とすると

$$S_0=S_+(\frac{\sigma^8}{2})+3\sigma^{10}=89\sigma-53=2.005024\cdots$$

となる．ここで，55 個のピンを配置した時にパゴダ関数の和が 2 以上となるピンの配置について考える．

まず，パゴダ関数の値が小さなマスについて考える．

パゴダ関数の値が $\frac{\sigma^8}{2}$ 以上のマスすべてにピンを配置し，σ^{10} のマスに 3 個ピンを配置した状態から，σ^{10} のピンを 1 個減らし，パゴダ関数の値がより小さなマス c に置く事を考える．この時，パゴダ関数の値の和は 2 以上であることが必要なので

$$S_0-\sigma^{10}+\mathrm{pag}(c)\geq 2$$

$$89\sigma-53-(-55\sigma+34)+\mathrm{pag}(c)\geq 2$$

$$\mathrm{pag}(c)\geq -144\sigma+89=\sigma^{12}$$

よって，σ^{10} のマスにある 3 個のピンのうち 1 個を σ^{12} のマスに移すと，ちょうどパゴダ関数の値が 2 となる．また，55 個のピンのうちいくつかを σ^{12} 未満のマスに置くと，パゴダ関数の値は 2 以上にならないことがわかる．

以上のことから，55 個のピンはすべてパゴダ関数の値が σ^{12} 以上のマスにおくことになる．

ここで，55 個のピンを置いたマスの集合を $\mathcal{C}_0$ とし，その状態からピンを 53 回移動させ σ^0 の 2 つのマス c_l, c_r にピンが到達したとする．また，ピンを k 回移動した後のピンのあるマスの集合を $\mathcal{C}_k$ とし，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}) = \sum_{c\in\mathcal{C}} \mathrm{pag}(c)$ と定めると，

$$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) \geq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_1) \geq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_2) \geq \cdots \geq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{53}) = 2$$

となる．$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) > 2$ の時は，53 回のピンの移動のうち少なくとも 1 回はパゴダ関数の和が減少する移動をすることになる．与えられたパゴダ関数において，その値の和が減少するピンの移動は $M_2, M_{10}, M_{11}, M_{13}, M_{14}$ の 5 通りあり，それぞれの場合でパゴダ関数の和の減少量を表にすると次のようになる．

移動				減少量
M_2 :	$\sigma^n + \sigma^{n+1}$	$\to$	σ^{n+2}	$2\sigma^{n+1}$
M_{10} :	$\sigma^{n+1} + \sigma^n$	$\to$	$\frac{\sigma^n}{2}$	$\sigma^{n+1} + \frac{\sigma^n}{2}$
M_{11} :	$\frac{\sigma^n}{2} + \sigma^n$	$\to$	σ^{n+1}	$\frac{\sigma^n}{2} + \sigma^{n+2}$
M_{13} :	$\frac{\sigma^n}{2} + \frac{\sigma^{n+1}}{2}$	$\to$	$\frac{\sigma^{n+2}}{2}$	σ^{n+1}
M_{14} :	$\sigma^n + \frac{\sigma^n}{2}$	$\to$	$\frac{\sigma^n}{2}$	σ^n

ここで，5 通りの移動それぞれにおいて，移動による減少量は n の値が大きい程少ないことに注意しておく．先に述べたように，最初の配置では 55 個のピンはすべて σ^{12} 以上のマスに置かれており，パゴダ関数の和が変わらない移動を続けている間はその状況は変わらず，すべてのピンが σ^{12} 以上のマスにある．従って，初めてパゴダ関数の和が減少する時，その時の移動は

$$M_2\ (n \leq 11),\ M_{10}\ (n \leq 11),\ M_{11}\ (n \leq 10),\ M_{13}\ (n \leq 9),\ M_{14}\ (n \leq 10)$$

のいずれかとなり，減少量はそれぞれ

$$\begin{aligned}
M_2 &: \quad 2\sigma^{n+1} \geq 2\sigma^{12} \\
M_{10} &: \quad \sigma^{n+1} + \tfrac{\sigma^n}{2} \geq \sigma^{12} + \tfrac{\sigma^{11}}{2} \\
M_{11} &: \quad \tfrac{\sigma^n}{2} + \sigma^{n+2} \geq \tfrac{\sigma^{10}}{2} + \sigma^{12} \\
M_{13} &: \quad \sigma^{n+1} \geq \sigma^{10} \\
M_{14} &: \quad \sigma^n \geq \sigma^{10}
\end{aligned}$$

となる．それぞれの移動における減少量の最小値を計算すると

$$2\sigma^{12} = 0.006211\cdots, \quad \sigma^{12} + \frac{\sigma^{11}}{2} = 0.005618\cdots$$
$$\sigma^{10} = 0.008130\cdots, \quad \frac{\sigma^{10}}{2} + \sigma^{12} = 0.007170\cdots$$

となり，移動によるパゴダ関数の和の減少量は 0.0056 以上であることが言える．

一方，55 個のマスを配置した状態から開始して m 回目の移動で初めてパゴダ関数の和が減少したとする，すなわち

$$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) = \mathrm{pag}(\mathcal{C}_1) = \cdots = \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{m-1}) > \mathrm{pag}(\mathcal{C}_m) \geq \cdots \geq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{53}) = 2$$

であるとする．初期配置のパゴダ関数の値の和 $\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0)$ は S_0 以下であるから，m 回目の移動による減少量は

$$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_{m-1}) - \mathrm{pag}(\mathcal{C}_m) \leq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) - \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{53}) \leq S_0 - 2 = 0.005024\cdots$$

となる．しかし，これは先に述べた，移動によるパゴダ関数の和の減少量は 0.0056 以上であることに反する．よって，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) = 2$ である．

次に，55 個のピンの配置 $\mathcal{C}_0$ で，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) = 2$ であるものを求める．

先の結果から，パゴダ関数の値が $\frac{\sigma^8}{2}$ 以上のマスすべてにピンを配置し，σ^{10} のマスに 2 個，σ^{12} のマスに 1 個ピンを配置した場合はパゴダ関数の和は 2 である．この配置を $\mathcal{C}_{0,a}$ とおく．また，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0)$ が最大となるのは，パゴダ関数の値が $\frac{\sigma^8}{2}$ 以上のマスすべてにピンを配置し，σ^{10} のマスに 3 個ピンを配置した場合である．この状態から $\mathrm{pag}(c) > \sigma^{10}$ を満たすマス c にあるピンを 1 つ取り，σ^{10} のマスにピンを 1 個増やしてもパゴダ関数の和が 2 以上であるとすると，

$$S_0 - \mathrm{pag}(c) + \sigma^{10} \geq 2$$
$$89\sigma - 53 - \mathrm{pag}(c) - 55\sigma + 34 \geq 2$$
$$\mathrm{pag}(c) \leq 34\sigma - 21 = \sigma^9$$

よって，σ^{10} のマスにピンを 1 つ追加し，パゴタ関数が σ^9 のマスのピンを 1 つ減らすとパゴダ関数の和が 2 となるが，σ^9 より大きな値のマスのピンを減らすと 2 未満となる．このことから，55 個のピンでパゴダ関数の値の和を 2 以上にするとき，σ^9 より大きな値を持つ 38 個のマスにはすべてピンが配置されていることになる．

p	σ^4	σ^5	$\frac{\sigma^4}{2}$	σ^6	$\frac{\sigma^5}{2}$	σ^7	$\frac{\sigma^6}{2}$	σ^8	$\frac{\sigma^7}{2}$	σ^9	$\frac{\sigma^8}{2}$	σ^{10}	$\cdots$	σ^{12}
$N(p)$	2	4	2	6	2	8	2	10	2	12	2	14	$\cdots$	18
ピンの数	2	4	2	6	2	8	2	10	2				$\cdots$	

そこで，残り 17 個のピンを σ^9 以下 σ^{12} 以上のどのマスに置けばパゴダ関数の和が 2 となるかを考える．先に述べたように，パゴダ関数の和が S_0 である配置から，σ^9 のマスのピンを 1 つ取り，σ^{10} のマスにピンを 1 個追加した配置ではパゴダ関数の和が 2 である．この配置を $\mathcal{C}_{0,b}$ とおく．

ここで，既に得られたパゴダ関数の和が 2 である配置 $\mathcal{C}_{0,a}, \mathcal{C}_{0,b}$ について，σ^9 以下のマスのピンの数をまとめておく．

p	σ^9	$\frac{\sigma^8}{2}$	σ^{10}	$\frac{\sigma^9}{2}$	σ^{11}	$\frac{\sigma^{10}}{2}$	σ^{12}
$N(p)$	12	2	14	2	16	2	18
$\mathcal{C}_{0,a}$	12	2	2	0	0	0	1
$\mathcal{C}_{0,b}$	11	2	4	0	0	0	0

この表と $\sigma^9, \cdots, \sigma^{12}$ の大小関係から，σ^9 のマスには少なくとも 11 個のピンが必要で，さらに σ^9 に 11 個のピンをおく配置は $\mathcal{C}_{0,b}$ 以外に無いことがわかる．また，σ^{12} にピンをおく配置も $\mathcal{C}_{0,a}$ 以外には存在しないこともわかる．従って，パゴダ関数の和が 2 となる新たな配置を求める時，σ^9 のマスには 12 個のピンがあり，σ^{12} のマスにはピンがない配置を考えればよい．よって，$\frac{\sigma^8}{2}$ から $\frac{\sigma^{10}}{2}$ のマスに 5 個のピンを置いてパゴダ関数の和が 2 となる配置を求める．

ここで，$\frac{\sigma^8}{2}$, σ^{10}, $\frac{\sigma^9}{2}$, σ^{11}, $\frac{\sigma^{10}}{2}$ のマスに，それぞれ u, v, w, x, y 個のピンを置いたときにパゴダ関数の和が 2 となったとすると，$u+v+w+x+y=5$ で

$$S_+(\sigma^9) + \frac{\sigma^8}{2}u + \sigma^{10}v + \frac{\sigma^9}{2}w + \sigma^{11}x + \frac{\sigma^{10}}{2}y = 2$$

この式に

$$S_+(\sigma^9) = 275\sigma - 168,\ \sigma^8 = -21\sigma + 13,\ \sigma^9 = 34\sigma - 21,$$
$$\sigma^{10} = -55\sigma + 34,\ \sigma^{11} = 89\sigma - 55$$

を代入すると

$$\begin{aligned} 275\sigma - 168 + & \frac{-21\sigma+13}{2}u + (-55\sigma+34)v \\ & + \frac{34\sigma-21}{2}w + (89\sigma-55)x + \frac{-55\sigma+34}{2}y = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(275 - \frac{21}{2}u - 55v + 17w + 89x - \frac{55}{2}y\right)\sigma \\ & \quad - 168 + \frac{13}{2}u + 34v - \frac{21}{2}w - 55x + 17y = 2 \end{aligned}$$

ここで，σ は無理数，u, v, w, x, y は非負整数であるから

$$\begin{cases} 275 - \frac{21}{2}u - 55v + 17w + 89x - \frac{55}{2}y = 0 & (4.1) \\ -168 + \frac{13}{2}u + 34v - \frac{21}{2}w - 55x + 17y = 2 & (4.2) \end{cases}$$

となる．(4.1)より

$$\frac{21}{2}u + 55v + \frac{55}{2}y = 275 + 17w + 89x \geq 275$$

また，$u + y \leq 5 - v$ を利用すると

$$\frac{21}{2}u + 55v + \frac{55}{2}y \leq 55v + \frac{55}{2}(u+y) \leq 55v + \frac{55}{2}(5-v) = \frac{55}{2}(5+v)$$

従って，

$$\frac{55}{2}(5+v) \geq 275$$

$$5+v \geq 10$$

$$\therefore v \geq 5$$

よって，$v \leq 5$ より $v=5$ となる．

さらに，$u+v+w+x+y=5$ より，$u=w=x=y=0$ となる．

$(u,v,w,x,y)=(0,5,0,0,0)$ を (4.1),(4.2)に代入すると成立するから，$\frac{\sigma^8}{2}$ 以下のマスのうち，σ^{10} のマスに 5 個置いた場合もパゴダ関数の和が 2 となる．この配置を $\mathcal{C}_{0,c}$ とおく．

以上のことから，パゴダ関数の和が 2 となる 55 個のピンの配置は 3 通りあり，それらの σ^9 以下のマスのピンの数は次のようになる．

p	σ^9	$\frac{\sigma^8}{2}$	σ^{10}	$\frac{\sigma^9}{2}$	σ^{11}	$\frac{\sigma^{10}}{2}$	σ^{12}
$\mathcal{C}_{0,a}$	12	2	2	0	0	0	1
$\mathcal{C}_{0,b}$	11	2	4	0	0	0	0
$\mathcal{C}_{0,c}$	12	0	5	0	0	0	0

また，どの場合も初期配置のパゴダ関数の和が 2 であるので，すべてのピンの移動においてパゴダ関数の和は変化しない．従って，可能な移動は次の 3 種類に限られる．

$$\sigma^{n+2}+\sigma^{n+1} \to \sigma^n, \quad \frac{\sigma^n}{2}+\frac{\sigma^n}{2} \to \sigma^n, \quad \frac{\sigma^{n+2}}{2}+\frac{\sigma^{n+1}}{2} \to \frac{\sigma^n}{2}$$

次にそれぞれの配置の場合に，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを残すことができるかどうかを調べる．

$\mathcal{C}_{0,a}$ の場合

σ^{12} のマスにあるピンを移動させるには σ^{11} のマスにピンが必要である．しかし，σ^{11} のマスにピンを移動させるには $\sigma^9+\sigma^{10} \to \sigma^{11}$ の移動が必要となり，この移動によりパゴダ関数の和が減少し，2 より小さくなる．

よって，$\mathcal{C}_{0,a}$ の初期配置から始めた場合は，σ^0 の 2 つのマスにピンを残すことはできない．

$\mathcal{C}_{0,b}$ の場合

$\mathcal{C}_{0,b}$ の初期配置から開始して，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを残すことができると仮定し，$\mathcal{C}_{0,b}$ の 55 個のマスを 2 つの集合に分ける．c_l にピンを移動させるのに必要なピンが最初にあったマスの集合を $\mathcal{C}_L$, c_r にピンを移動させるのに必要なピンが最初にあったマスの集合を $\mathcal{C}_R$ とする．この時，

$$\mathcal{C}_{0,b}=\mathcal{C}_L \cup \mathcal{C}_R,\ \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_R=\phi,\ \mathrm{pag}(\mathcal{C}_L)=\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R)=\sigma^0=1 \qquad (4.3)$$

である．そこで，$\mathcal{C}_{0,b}$ の 55 個のマスをパゴダ関数の和が 1 となる 2 つの集合に分けることを考える．

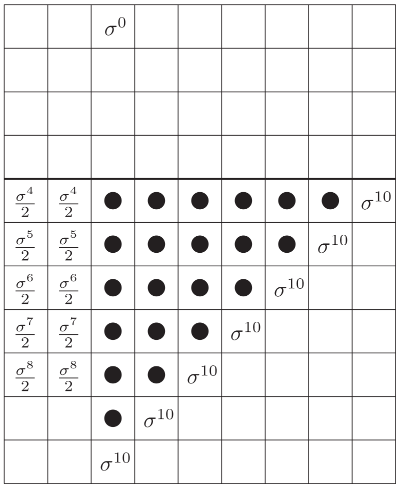


図 4.1　$\mathcal{C}_R$ のピン配置（一部）

まず，どのピンの移動においてもパゴダ関数の和は減少することはないので，σ^k のマスにあるピンは $\frac{\sigma^m}{2}$ のマスに移動することはできない．従って，$\frac{\sigma^m}{2}$ の右側にある σ^k のマスのピンは c_r に移動するのに使われ，$\frac{\sigma^m}{2}$ の左側にある σ^k のマスのピンは c_l に移動するのに使われる．よって，$\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ はどちらも $\sigma^4, \sigma^5, \cdots, \sigma^8$ のマスをそれぞれ $1, 2, \cdots, 5$ 個含む．

また，σ^9 のマスにはピンが 11 個あるが，これは一方に 5 個，もう一方に 6 個含まれることになるので，ここでは $\mathcal{C}_L$ に 5 個，$\mathcal{C}_R$ に 6 個含まれるとする．すると，$\mathcal{C}_R$ のピンの配置で，既にわかっている部分だけを図示すると図 4.1 のようになる．

残りは $\frac{\sigma^4}{2}, \frac{\sigma^5}{2}, \cdots, \frac{\sigma^8}{2}$ のそれぞれ 2 つのマスと σ^{10} の 4 つのマスである．

ここで，$\mathcal{C}_R$ が含む $\frac{\sigma^4}{2}, \frac{\sigma^5}{2}, \frac{\sigma^6}{2}, \frac{\sigma^7}{2}, \frac{\sigma^8}{2}, \sigma^{10}$ のマスの数をそれぞれ u, v, w, x, y, z とおくと，u, v, w, x, y は 2 以下，z は 4 以下の非負整数である．また，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R)$ を求めると

$$\begin{aligned}
\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) &= \sigma^4 + 2\sigma^5 + 3\sigma^6 + 4\sigma^7 + 5\sigma^8 + 6\sigma^9 \\
&\qquad + \frac{\sigma^4}{2}u + \frac{\sigma^5}{2}v + \frac{\sigma^6}{2}w + \frac{\sigma^7}{2}x + \frac{\sigma^8}{2}y + \sigma^{10}z \\
&= 134\sigma - 82 + \frac{-3\sigma+2}{2}u + \frac{5\sigma-3}{2}v + \frac{-8\sigma+5}{2}w \\
&\qquad + \frac{13\sigma-8}{2}x + \frac{-21\sigma+13}{2}y + (-55\sigma+34)z \\
&= \left(134 - \frac{3}{2}u + \frac{5}{2}v - 4w + \frac{13}{2}x - \frac{21}{2}y - 55z\right)\sigma \\
&\qquad - 82 + u - \frac{3}{2}v + \frac{5}{2}w - 4x + \frac{13}{2}y + 34z
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R)=1$ であり，σ は無理数であるから

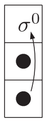
$$\begin{cases} 134-\dfrac{3}{2}u+\dfrac{5}{2}v-4w+\dfrac{13}{2}x-\dfrac{21}{2}y-55z=0 & (4.4) \\ -82+u-\dfrac{3}{2}v+\dfrac{5}{2}w-4x+\dfrac{13}{2}y+34z=1 & (4.5) \end{cases}$$

(4.5)より

$$34z=83-u+\frac{3}{2}v-\frac{5}{2}w+4x-\frac{13}{2}y$$

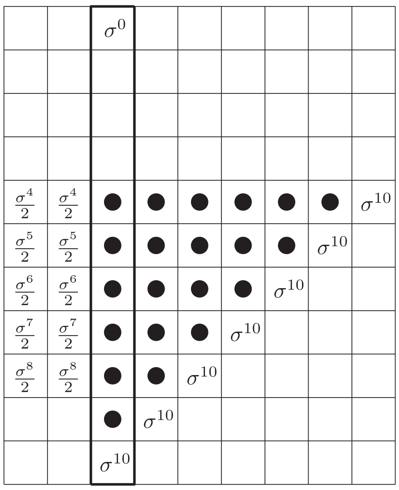
u,v,w,x,y はすべて 2 以下の非負整数であるから，$63\leq 34z\leq 94$ となり，z は整数であるから $z=2$ となる．従って，図 4.1 の σ^{10} の 7 つのマスのうち 2 箇所にピンを置くことになる．

ここで，$\mathcal{C}_R$ の初期配置から σ^0 のマスにピンが移動できるとすると，最後のピンの移動は



であるから，移動の途中でピンがすべて，目的地の σ^0 のマスと同じ列に存在することになる．

ここで，マスに複数のピンを置くことを許し，σ^0 にピンを移動させるための手順のうち，σ^0 のマスと同じ列内での移動を省いた後の状態を考えると，すべてのピンが下図の太枠内に含まれることになる．



また，ピンの移動に関しては，パゴダ関数の値の和を変えないものだけを用いるので，ピンは太枠を越えて反対側に移動することはない．従って，太枠の右側のピンはそれらだけで太枠内に移動することになり，さらにこの時のピンの移動は左または上への移動である．

ここで，太枠の右側のピンだけに注目すると，その配置は次のようになり，さらに σ^{10} のマスのうち 1 または 2 箇所にピンが入る．

σ^4	●	●	●	●	●	σ^{10}
σ^5	●	●	●	●	σ^{10}	
σ^6	●	●	●	σ^{10}		
σ^7	●	●	σ^{10}			
σ^8	●	σ^{10}				
σ^9	σ^{10}					
σ^{10}						

ここで，例 1.5 のパゴダ関数を用いて，次の図のように新たなパゴダ関数を定義する．図で，◯ が付いているマスは，目的地であるピンを移動させるマス，下線を付けたマスはピンの配置が確定しているマスである．

34	$34\sigma^1$	$34\sigma^2$	$34\sigma^3$	$34\sigma^4$	$34\sigma^5$	$34\sigma^6$
21	$21\sigma^1$	$21\sigma^2$	$21\sigma^3$	$21\sigma^4$	$21\sigma^5$	$21\sigma^6$
13	$13\sigma^1$	$13\sigma^2$	$13\sigma^3$	$13\sigma^4$	$13\sigma^5$	$13\sigma^6$
8	$8\sigma^1$	$8\sigma^2$	$8\sigma^3$	$8\sigma^4$	$8\sigma^5$	$8\sigma^6$
5	$\underline{5\sigma^1}$	$\underline{5\sigma^2}$	$\underline{5\sigma^3}$	$\underline{5\sigma^4}$	$\underline{5\sigma^5}$	$\boxed{5\sigma^6}$
3	$\underline{3\sigma^1}$	$\underline{3\sigma^2}$	$\underline{3\sigma^3}$	$\underline{3\sigma^4}$	$\boxed{3\sigma^5}$	$3\sigma^6$
2	$\underline{2\sigma^1}$	$\underline{2\sigma^2}$	$\underline{2\sigma^3}$	$\boxed{2\sigma^4}$	$2\sigma^5$	$2\sigma^6$
1	$\underline{\sigma^1}$	$\underline{\sigma^2}$	$\boxed{\sigma^3}$	σ^4	σ^5	σ^6
1	$\underline{\sigma^1}$	$\boxed{\sigma^2}$	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
0	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0

この新たなパゴダ関数においても，ピンの上及び左への移動ではパゴダ関数の和は変化しないので，最初の状態と太枠内に移動した後の状態でパゴダ関数の和は一致する．また，太枠内のパゴダ関数の値はすべて整数であるので，太枠内に移動した後のパゴダ関数の和は整数である．よって，最初の状態においてもパゴダ関数の和は整数となる必要がある．

ここで，配置が確定しているマスのパゴダ関数の和を計算すると

$$
\begin{aligned}
&(1+1+2+3+5)\sigma^1 + (1+2+3+5)\sigma^2 + (2+3+5)\sigma^3 + (3+5)\sigma^4 + 5\sigma^5 \\
&= 12\sigma + 11\sigma^2 + 10\sigma^3 + 8\sigma^4 + 5\sigma^5 \\
&= 12\sigma + 11(-\sigma+1) + 10(2\sigma-1) + 8(-3\sigma+2) + 5(5\sigma-3) \\
&= 22\sigma + 2
\end{aligned}
$$

であり，これに上の図の □ の付いたマスのうちの 1 つか 2 つの値を足すと最初の状態のパゴダ関数の和となる．また，σ は無理数であるので，最初の状態のパゴダ関数の和を $m\sigma+n$ (m, n : 整数)

の形に表わした時，σ の係数 m は 0 となる必要がある．□ 付きのマスのパゴダ関数の値は $0, \sigma^2, \sigma^3, 2\sigma^4, 3\sigma^5, 5\sigma^6$ で，それぞれ σ の一次式で表わすと

$$0,\ -\sigma+1,\ 2\sigma-1,\ -6\sigma+3,\ 15\sigma-9,\ -40\sigma+25 \tag{4.6}$$

である．(4.6)のうちの 1, 2 個を $22\sigma+2$ に加えた値を整数にするためには，加える値の σ の係数は -22 とならなければならないが，(4.6)の σ の係数 $0, -1, 2, -6, 15, -40$ のうちどの 1, 2 個を選んでも -22 にすることはできない．よって，ピンをすべて太枠内に移動させることができないので，$\mathcal{C}_R$ の配置から c_r にピンを移動させることはできない．

従って，(4.3)を満たす $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ は存在しないので，$\mathcal{C}_{0,b}$ の初期配置から，4 段目の 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることはできない．

$\mathcal{C}_{0,c}$ の場合

$\mathcal{C}_{0,b}$ の場合と同じように，$\mathcal{C}_{0,c}$ の初期配置から開始して，σ^0 の 2 つのマスにピンを残すことができると仮定し，$\mathcal{C}_{0,c}$ の 55 個のマスを 2 つの集合に分ける．c_l, c_r のマスにピンを移動させるのに必要なピンが最初にあったマスの集合をそれぞれ $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ とすると，

$$\mathcal{C}_{0,c} = \mathcal{C}_L \cup \mathcal{C}_R,\ \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_R = \phi,\ \mathrm{pag}(\mathcal{C}_L) = \mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) = \sigma^0 = 1 \tag{4.7}$$

であり，さらに $\mathcal{C}_{0,b}$ の時と同様にして，$\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ はどちらも $\sigma^4, \sigma^5, \cdots, \sigma^8$ のマスをそれぞれ $1, 2, \cdots, 5$ 個含むことがわかる．

また，σ^9 のマスにはピンが 11 個あるが，これは一方に 5 個，もう一方に 6 個含まれることになるので，ここでは $\mathcal{C}_L$ に 5 個，$\mathcal{C}_R$ に 6 個含まれるとする．残りは $\frac{\sigma^4}{2}, \frac{\sigma^5}{2}, \frac{\sigma^6}{2}, \frac{\sigma^7}{2}$ のそれぞれ 2 つのマスと σ^{10} の 5 個のマスである．

$\mathcal{C}_R$ が含む $\frac{\sigma^4}{2}, \frac{\sigma^5}{2}, \frac{\sigma^6}{2}, \frac{\sigma^7}{2}, \sigma^{10}$ のマスの数をそれぞれ u, v, w, x, y とおくと，u, v, w, x は 2 以下，y は 5 以下の非負整数である．$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R)$ を求めると

$$\begin{aligned}
\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) &= \sigma^4 + 2\sigma^5 + 3\sigma^6 + 4\sigma^7 + 5\sigma^8 + 6\sigma^9 + \frac{\sigma^4}{2}u + \frac{\sigma^5}{2}v + \frac{\sigma^6}{2}w + \frac{\sigma^7}{2}x + \sigma^{10}y \\
&= 134\sigma - 82 + \frac{-3\sigma+2}{2}u + \frac{5\sigma-3}{2}v + \frac{-8\sigma+5}{2}w + \frac{13\sigma-8}{2}x + (-55\sigma+34)y \\
&= \left(134 - \frac{3}{2}u + \frac{5}{2}v - 4w + \frac{13}{2}x - 55y\right)\sigma - 82 + u - \frac{3}{2}v + \frac{5}{2}w - 4x + 34y
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) = 1$ であり，σ は無理数であるから

$$\begin{cases}
134 - \frac{3}{2}u + \frac{5}{2}v - 4w + \frac{13}{2}x - 55y = 0 & (4.8) \\
-82 + u - \frac{3}{2}v + \frac{5}{2}w - 4x + 34y = 1 & (4.9)
\end{cases}$$

となる．(4.9)より

$$34y = 83 - u + \frac{3}{2}v - \frac{5}{2}w + 4x$$

となり，u, v, w, x はすべて 2 以下の非負整数であるから，$76 \leq 34y \leq 94$ となるが，これを満たす整数 y は存在しない．

従って，(4.7)を満たす $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ は存在しないので，$\mathcal{C}_{0,c}$ の初期配置から始めた場合は，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを残すことはできない．

以上のことから，55 個のピンを配置して，4 段目の 2 つのマスにピンを移動させることはできないので $\mathrm{MS}(4,2) \geq 56$ である．また，56 個のピンを図 4.2 のように配置すると c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることができるので $\mathrm{MS}(4,2) = 56$．

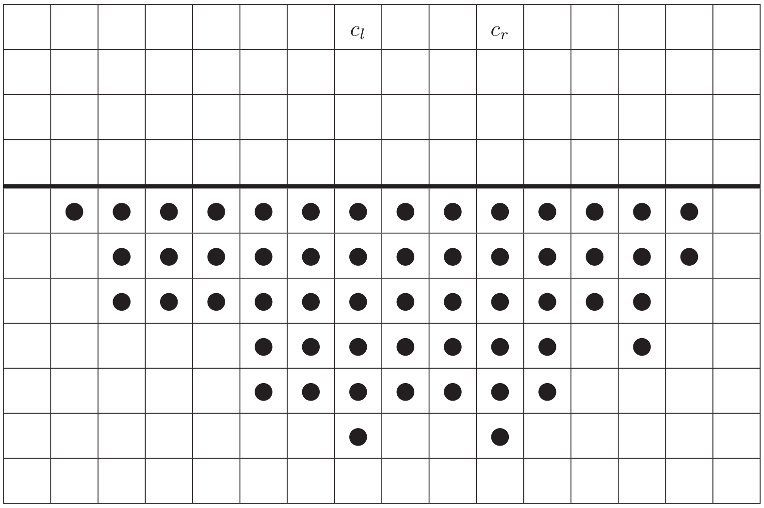
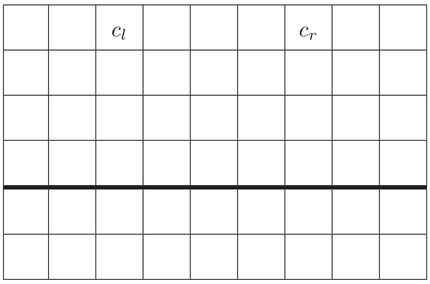


図 4.2　II(4, 2) 型の最小配置

4.4　II(4, 3) 型

図の太線（基準線）から下にピンを配置して，基準線から上へ 4 段目の，3 つ離れた 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるかを考える．



ここで，パゴダ関数 pag として例 1.4 のパゴダ関数を利用し，$\mathrm{pag}(c_l) = \mathrm{pag}(c_r) = \sigma^0$ となるように定める．

σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	σ^0	0	σ^0	0	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^1	0	σ^1	0	σ^1	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	0	σ^2	0	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	0	σ^3	0	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	0	σ^4	0	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	0	σ^5	0	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	0	σ^6	0	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	0	σ^7	0	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	0	σ^8	0	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}
σ^{13}	σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	0	σ^9	0	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	σ^{13}

初期配置のパゴダ関数の値の和は 2 以上であるので，それを利用して必要なピンの最小個数を求める．σ^k は k に関して単調減少だから，基準線より下にあるマスのパゴダ関数の値を大きいものから順に並べると，$\sigma^4, \sigma^5, \sigma^6, \cdots$ となり，それぞれの値を $a\sigma + b$ で表した時の形や $N(p), N_+(p), S_+(p)$ を表にまとめると次のようになる．

p	$a\sigma+b$	$N(p)$	$N_+(p)$	$S_+(p)$
σ^4	$-3\sigma+2$	3	3	$-9\sigma+6 = 0.437694\cdots$
σ^5	$5\sigma-3$	5	8	$16\sigma-9 = 0.888543\cdots$
σ^6	$-8\sigma+5$	7	15	$-40\sigma+26 = 1.278640\cdots$
σ^7	$13\sigma-8$	9	24	$77\sigma-46 = 1.588617\cdots$
σ^8	$-21\sigma+13$	11	35	$-154\sigma+97 = 1.822765\cdots$
σ^9	$34\sigma-21$	13	48	$288\sigma-176 = 1.993788\cdots$
σ^{10}	$-55\sigma+34$	15	63	$-537\sigma+334 = 2.115748\cdots$

この表から, 必要なピンの最小個数は 48 よりも大きいことがいえる．さらに, $S_+(\sigma^9)+k\sigma^{10} \geq 2$ となる自然数 k の最小値を求めると

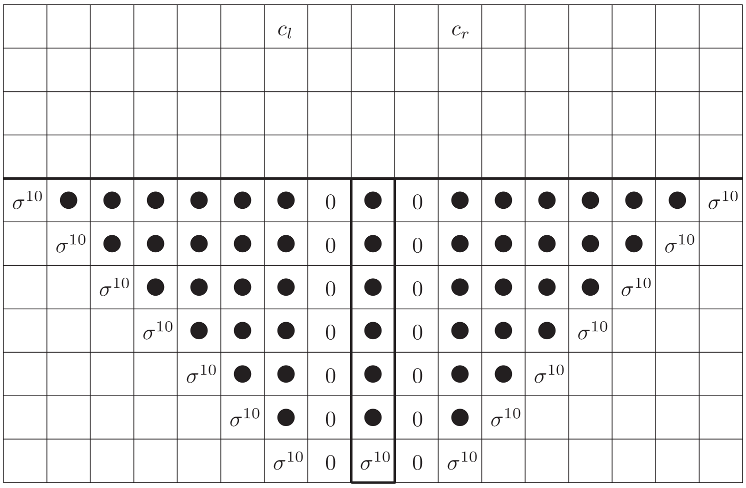
$$288\sigma - 176 + k(-55\sigma+34) \geq 2$$

$$k \geq \frac{178-288\sigma}{-55\sigma+34} = 0.76\cdots$$

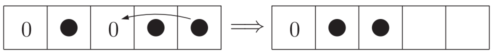
よって，k の最小値は 1 となり，パゴダ関数の和を 2 以上とするためにはピンが 49 個必要なので最小個数は 49 以上である．また，この時のパゴダ関数の和は

$$S_+(\sigma^9) + \sigma^{10} = 288\sigma - 176 + (-55\sigma+34) = 233\sigma - 142 = 2.00191\cdots$$

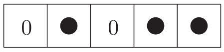
であり，49 個のピンの配置は，σ^{10} のマス以外は次のようになる．



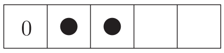
図のピンはすべて，c_l か c_r と同じ列に移動することになるのであるが，太枠内のマスにあるピンが左右どちらかに移動しようとすると 0 のマスにピンが必要となる．この状態から，0 のマスにピンを移動させようとすると，以下の移動が必要となる．



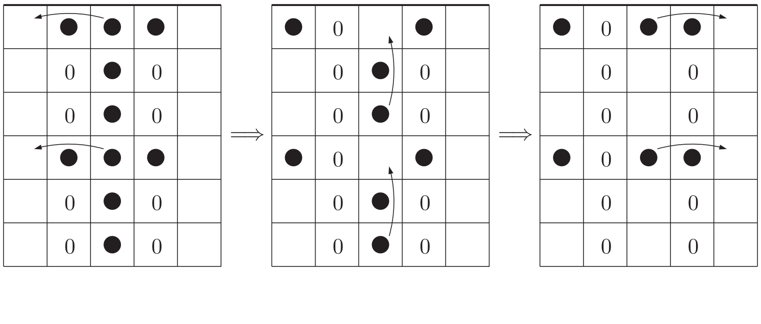
しかし，この場合は最初の配置において



の部分を



に変更した方がピンの数は少なくなるので，ピンの個数が最小の配置では 0 のマスにピンが必要となる．ここで，0 のマスに何個のピンが必要かを考えると，以下のように少なくとも 4 個必要である．



すると，0 以外のマスに 49 個，0 のマスに 4 個のピンが必要となり，この場合は 53 個のピンが必要となる．ここで，σ^9 以上のすべてのマスと σ^{10} の 1 つのマス，0 の 4 つのマスにピンを置く配置を $\mathcal{C}_{0,a}$ とおく．

次に，0 以外のマスに 49 個のピンを配置して，パゴダ関数の和が 2 以上になるものをすべて求める．$\mathcal{C}_{0,a}$ の配置から，σ^{10} のピンを σ^{11} のマスに置き換えると，その時のパゴダ関数の和は

$$\begin{aligned} S_+(\sigma^9) + \sigma^{11} &= 288\sigma - 176 + 89\sigma - 55 \\ &= 377\sigma - 231 = 1.998\cdots \end{aligned}$$

となり，2 未満となるので，0 以外のマスに 49 個のピンをおく方法は $\mathcal{C}_{0,a}$ しか存在しない．従って，σ^9 以上のすべてのマスにピンを配置してパゴダ関数の和が 2 以上になる，53 個以下のピンの配置は $\mathcal{C}_{0,a}$ に限られることがわかる．

次に，53 個以下のピンの配置で，パゴダ関数の和が 2 以上となるものを求める．0 以外のマスに 49 個おく場合は既に得られているので，0 以外のマスに 50 個以上のピンを置く場合を考えればよい．

53 個のピンを配置した中でパゴダ関数の和が最大である，σ^9 以上の 48 個のマスと σ^{10} のマス 5 個の計 53 個のマスにピンを置いた状態から，$\sigma^k (k \leq 9)$ のマスのピンを 1 つ σ^{10} のマスに置き換えてもパゴダ関数の和が 2 以上であるとすると，

$$S_+(\sigma^9) + 6\sigma^{10} - \sigma^k \geq 2$$

$$\begin{aligned} \sigma^k &\leq 288\sigma - 176 + 6(-55\sigma + 34) - 2 \\ &= -42\sigma + 26 = 0.042\cdots \end{aligned}$$

ここで，$\sigma^6 = 0.055\cdots, \sigma^7 = 0.034\cdots$ より，$k \geq 7$ となる．

従って，53 個以下のピンの配置では，$\sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$ のマスにはすべてピンを置くことになる．すると，0 のマスにはさまれている $\sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$ のマスにもピンを置くことになり，この 3 個のピンを左右どちらかに移動させる為に下の図のように 0 のマスにピン (○) が少なくとも 2 個必要となる．

○	●	○
0	●	0
0	●	0
0	σ^7	0

よって，最小配置では 0 のマスにピンが少なくとも 2 個必要であるので，0 以外のマスが 51 個以下でパゴダ関数の和が 2 以上となるものを調べる．

51 個のピンを配置した中でパゴダ関数の和が最大である，σ^9 以上の 48 個のマスと σ^{10} のマス 3 個の計 51 個のマスにピンを置いた状態から，$\sigma^k (k \leq 9)$ のマスのピンを 1 つ σ^{10} に置き換

えてもパゴダ関数の和が 2 以上であるとすると，

$$S_+(\sigma^9) + 4\sigma^{10} - \sigma^k \geq 2$$

$$\begin{aligned}\sigma^k &\leq 288\sigma - 176 + 4(-55\sigma + 34) - 2 \\ &= 68\sigma - 42 = 0.026\cdots\end{aligned}$$

ここで，$\sigma^7 = 0.034\cdots, \sigma^8 = 0.021\cdots$ より，$k \geq 8$ となる．

従って，σ^7 のマスにもすべてピンを置くことになるので，0 のマスにはさまれている σ^7 のマスにもピンを置くことになる．すると，0 のマスに必要なピンはさらに増え，下の図のように少なくとも 3 個のピンが必要となり，0 以外のマスのピンの数は 50 以下となる．

○	●	○
0	●	0
0	●	0
0	●	○

しかし，ここでは 0 以外のマスのピンは 50 個以上の場合を考えているので，50 個の場合だけを考えればよい。0 以外のマスに 50 個のピンを置いたとき，パゴダ関数の和が最大となるのは σ^9 以上の 48 個のマスと σ^{10} のマス 2 個にピンを置いた場合である．ここで，その状態から $\sigma^k (k \leq 9)$ のマスのピンを 1 個取り除き，σ^{10} のマスに 1 個ピンを追加してもパゴダ関数の和が 2 以上であるとすると

$$S_+(\sigma^9) + 3\sigma^{10} - \sigma^k \geq 2$$

$$\begin{aligned}\sigma^k &\leq 288\sigma - 176 + 3(-55\sigma + 34) - 2 \\ &= 123\sigma - 76 = 0.018\cdots\end{aligned}$$

ここで，$\sigma^8 = 0.021\cdots, \sigma^9 = 0.013\cdots$ より，$k \geq 9$ となり，σ^8 以上のマスにはすべてピンを置くことになる．このことにより，0 にはさまれた σ^8 のマスにもピンを置くことになるが，それにより 0 のマスに必要なピンの数は増えない．例えば，3 個のピンを次のように配置すればよい．

○	●	○
0	●	0
0	●	○
0	●	0
0	●	0

以上で，0 以外のマスの 50 個のピンのうち，σ^8 以上のマスに置く 35 個の配置が決まった．残り 15 個のピンの配置を考える．

ここで，σ^9 の 13 箇所のマスにすべてピンを置くと，先の議論からピンの配置は $\mathcal{C}_{0,a}$ と一致するので，σ^9 のマスに置くピンの数は 12 以下としてよい．

そこで，$k \leq 12$ とし，σ^9 のマスに k 個，σ^{10} のマスに $15-k$ 個配置した時に，パゴダ関数の和が 2 以上となったとすると，

$$S_+(\sigma^8) + k\sigma^9 + (15-k)\sigma^{10} \geq 2$$

$$-154\sigma + 97 + k(34\sigma - 21) + (15-k)(-55\sigma + 34) \geq 2$$

$$(89\sigma - 55)k \geq 979\sigma - 605$$

$$k \geq \frac{979\sigma - 605}{89\sigma - 55} = 11$$

$$\therefore\ k = 11, 12$$

よって，σ^9 のマスには 11 または 12 個のピンが必要である．さらに，σ^9 に 11 個，σ^{10} に 4 個ピンを置いたときにパゴダ関数の和が 2 となることがわかる．この時の配置を $\mathcal{C}_{0,b}$ とおく．

また，この配置から σ^{10} のマスの 4 個のピンのうち 1 個でも σ^{11} 以下のマスに移すとパゴダ関数の和は減少して 2 未満となるので，σ^9 に 11 個のピンを置いてパゴダ関数の和が 2 以上となるのは，$\mathcal{C}_{0,b}$ に限られる．

次に，σ^9 のマスに 12 個のピンを配置する場合を考える．この場合は残りの 3 個のピンを σ^{10} 以下のマスに置くことになる．この条件のもとでパゴダ関数の和が最大となるのは σ^{10} のマスに 3 個のピンを置いた場合であり，この時の配置を $\mathcal{C}_{0,c}$ とおくと，パゴダ関数の和は

$$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,c}) = S_+(\sigma^8) + 12\sigma^9 + 3\sigma^{10} = 89\sigma - 53 = 2.00502\cdots$$

である．また，σ^{10} のマスにピンを 2 個，$\sigma^k (k > 10)$ のマスにピンを 1 個置いてパゴダ関数の和が 2 以上であったとすると

$$S_+(\sigma^8) + 12\sigma^9 + 2\sigma^{10} + \sigma^k \geq 2$$

$$\sigma^k \geq -144\sigma + 89 = \sigma^{12}$$

よって，$k \leq 12$ であり，さらに σ^{10} にピンを 2 個，σ^{12} にピンを 1 個置いたときはパゴダ関数の和が 2 となることがわかる．この時の配置を $\mathcal{C}_{0,d}$ とする．

$\mathcal{C}_{0,d}$ の σ^{12} のマスのピンを σ^{11} のマスに置き換えるとパゴダ関数の和が増加するので，この配置を $\mathcal{C}_{0,e}$ とすると $\mathcal{C}_{0,e}$ も条件を満たし，この時のパゴダ関数の和は

$$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,e}) = S_+(\sigma^8) + 12\sigma^9 + 2\sigma^{10} + \sigma^{11} = 233\sigma - 142 = 2.00191\cdots$$

である．

また，σ^{10} のマスに置くピンの数を 1 以下とすると，パゴダ関数の和は

$$S_+(\sigma^8) + 12\sigma^9 + \sigma^{10} + 2\sigma^{11} = 377\sigma - 231 = 1.99881\cdots$$

以下となるので，この場合はパゴダ関数が 2 以上にはならない．

以上により，パゴダ関数の和が 2 以上となる 53 個以下のピンの配置がすべて得られ，それらのピンの数とパゴダ関数の和を表にまとめると次のようになる．また，どの配置でもピンの総数は 53 である．

	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	0	$\mathrm{pag}(\mathcal{C})$
$\mathcal{C}_{0,a}$	3	5	7	9	11	13	1	0	0	4	$2.00191\cdots$
$\mathcal{C}_{0,b}$	3	5	7	9	11	11	4	0	0	3	2
$\mathcal{C}_{0,c}$	3	5	7	9	11	12	3	0	0	3	$2.00502\cdots$
$\mathcal{C}_{0,d}$	3	5	7	9	11	12	2	0	1	3	2
$\mathcal{C}_{0,e}$	3	5	7	9	11	12	2	1	0	3	$2.00191\cdots$

ここで，パゴダ関数の和が 2 より大きい 3 つの配置 $\mathcal{C}_{0,a}, \mathcal{C}_{0,c}, \mathcal{C}_{0,e}$ に関しては，c_l, c_r のマスにピンが移動した最後の状態ではパゴダ関数の和が 2 であるので，少なくても 1 回はパゴダ関数の和が減少する移動をすることになる．

与えられたパゴダ関数では，その和が減少する移動は

$$\sigma^{k-1} + \sigma^k \to \sigma^{k+1}, \quad \sigma^k + \sigma^{k-1} \to 0, \quad 0 + \sigma^k \to 0$$

の 3 通りあり，それぞれの移動での和の減少量は $2\sigma^k, \sigma^{k-2}, \sigma^k$ である．さらに，σ^n は単調減少であるので $2\sigma^k, \sigma^{k-2}, \sigma^k$ のうち σ^k が最小となる．従って，すべてのピンが σ^m 以上または 0 のマスにある場合，最小の減少量は σ^m である．

ここで，$\mathcal{C}_{0,a}, \mathcal{C}_{0,c}$ の配置ではピンのあるマスのパゴダ関数は σ^{10} 以上または 0 であるので，最小の減少量は σ^{10} である．また，$\mathcal{C}_{0,e}$ の場合はピンは σ^{11} 以上または 0 のマスにあるので，最小の減少量は σ^{11} である．

従って，パゴダ関数の和が減少する移動をした直後のピンの配置を $\mathcal{C}$ とすると，

$$\mathcal{C}_{0,a}: \ \mathrm{pag}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,a}) - \sigma^{10} = 2.0019\cdots - 0.0081\cdots < 2$$

$$\mathcal{C}_{0,c}: \ \mathrm{pag}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,c}) - \sigma^{10} = 2.0050\cdots - 0.0081\cdots < 2$$

$$\mathcal{C}_{0,e}: \ \mathrm{pag}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,e}) - \sigma^{11} = 2.0019\cdots - 0.0050\cdots < 2$$

となり，どの場合も 2 未満となるので c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることはできない．

次に，配置 $\mathcal{C}_{0,d}$ を考える．$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_{0,d}) = 2$ より，この場合はパゴダ関数の和が変化しない移動のみを使うことになる．一方 σ^{12} のマスにあるピンを動かすには σ^{11} のマスにピンが必要となるが，σ^{11} のマスにピンを移動させるには $\sigma^9 + \sigma^{10} \to \sigma^{11}$ の移動が必要である．しかし，この移動はパゴダ関数の和を減少させるので，この場合は使えない．従って，σ^{12} にあるピンは移動できないことになり，$\mathcal{C}_{0,d}$ の配置から c_l, c_r にピンを移動させることはできないことがわかる．

以上のことから，c_l, c_r にピンを移動させる為のピン 53 個の初期配置は $\mathcal{C}_{0,b}$ に限られる．

ここで，$\mathcal{C}_{0,b}$ の初期配置から開始して，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを残すことができると仮定し，$\mathcal{C}_{0,b}$ の 53 個のマスを 2 つの集合に分ける．マス c_l, c_r にピンを移動させるのに必要なピンが最初にあったマスの集合をそれぞれ $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ とする．すると，

$$\mathcal{C}_{0,b} = \mathcal{C}_L \cup \mathcal{C}_R,\ \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_R = \phi,\ \mathrm{pag}(\mathcal{C}_L) = \mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) = \sigma^0 = 1 \tag{4.10}$$

である．

ここで，$\mathcal{C}_{0,b}$ のピンの配置を調べると，パゴダ関数が σ^8 以上のマスにはすべてピンが配置されているので，次のようなピンの配置となる．

						c_l				c_r						
σ^{10}	σ^9	●	●	●	●	●	0	●	0	●	●	●	●	●	σ^9	σ^{10}
	σ^{10}	σ^9	●	●	●	●	0	●	0	●	●	●	●	σ^9	σ^{10}	
		σ^{10}	σ^9	●	●	●	0	●	0	●	●	●	σ^9	σ^{10}		
			σ^{10}	σ^9	●	●	0	●	0	●	●	σ^9	σ^{10}			
				σ^{10}	σ^9	●	0	●	0	●	σ^9	σ^{10}				
					σ^{10}	σ^9	0	σ^9	0	σ^9	σ^{10}					
						σ^{10}	0	σ^{10}	0	σ^{10}						

残りのピンは $\sigma^9, \sigma^{10}, 0$ のマスにそれぞれ 11, 4, 3 個置くことになる．ここで，0 のマスにはさまれた σ^9, σ^{10} のマスにピンを置くと，0 のマスにピンが 4 個以上必要となるので，0 のマスにはさまれた σ^9, σ^{10} のマスにはピンは置けない．

従って，0 のマスにはさまれた部分については，$\sigma^4, \sigma^5, \sigma^6, \sigma^7, \sigma^8$ の 5 個のマスにだけピンがある．この時，0 のどのマスにピンが必要かを考える．

σ^4 のピンが c_l, c_r と同じ列に移動する為には σ^4 の隣の 0 にピンが必要である．0 にはさまれたマスのピンが c_l, c_r と同じ列に移動するには，0 のピンが必要であり，残っている 0 のピンは 2 個だけなので，$\sigma^5, \cdots, \sigma^8$ の 4 つのピンが c_l, c_r と同じ列に移動する直前の状態では，0 のマスにはさまれたマスに 2 個のピンがある．この 2 個のピンがあるマスのパゴダ関数を $\sigma^k, \sigma^m (4 \leq k \leq m \leq 8)$ とすると，ピンの移動によりパゴダ関数の和が変化しないことから

$$\sigma^5 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^8 = \sigma^k + \sigma^m$$

である．ここで，$2\sigma^k \geq \sigma^k + \sigma^m$ より

$$\sigma^k \geq \frac{1}{2}(\sigma^5 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^8) = 0.1008\cdots$$

となり，$\sigma^4 = 0.1458\cdots, \sigma^5 = 0.0901\cdots$, $k \geq 4$ より $k = 4$ である．さらに，

$$\sigma^m = \sigma^5 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^8 - \sigma^4 = \sigma^7 + \sigma^8 = \sigma^6$$

より，$m = 6$ となる．

よって，ピンが必要な 0 のマスは σ^4 の両隣と σ^6 の隣のマスであり，ピンの配置は次のようになる．

σ^{10}	σ^9	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	σ^9	σ^{10}
	σ^{10}	σ^9	●	●	●	●	0	●	0	●	●	●	●	σ^9	σ^{10}	
		σ^{10}	σ^9	●	●	●	0	●	●	●	●	●	σ^9	σ^{10}		
			σ^{10}	σ^9	●	●	0	●	0	●	●	σ^9	σ^{10}			
				σ^{10}	σ^9	●	0	●	0	●	σ^9	σ^{10}				
					σ^{10}	σ^9	0	σ^9	0	σ^9	σ^{10}					
						σ^{10}	0	σ^{10}	0	σ^{10}						

ここで，上図のピンが置かれた 38 個のマスを $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ に分ける．ピンの移動はすべてパゴダ関数の和を変化させない移動であるから，c_l の列から左のマスにあるピンが c_r にピンを移動させるのに使われることはないし，c_r の列から右のマスにあるピンが c_l にピンを移動させるのに使われることはない．また，0 にはさまれたマスにあるピンに関しては，ピンのある 0 のマスの方向に移動するので σ^4, σ^6 は $\mathcal{C}_R$ に，残りの $\sigma^5, \sigma^7, \sigma^8$ は $\mathcal{C}_L$ に含まれるとしてよい．勿論，$\sigma^4, \sigma^5, \cdots, \sigma^8$ のマスの分け方は他にもあるが，パゴダ関数の和は分け方によって変化しないので，ここではこのように分けておく．ここで，$\mathcal{C}_R$ に含まれる σ^9, σ^{10} のマスの個数をそれぞれ u, v とすると，$\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ に含まれる $\sigma^4, \cdots, \sigma^{10}, 0$ のマスの個数は次のようになる．

	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	0
$\mathcal{C}_R$	2	2	4	4	5	u	v	2
$\mathcal{C}_L$	1	3	3	5	6	$11-u$	$4-v$	1

また，図より $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ に含まれる σ^9 のマスのピンはどちらも 6 個以下であるので，$5 \leq u \leq 6$ である．ここで，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) &= 2\sigma^4 + 2\sigma^5 + 4\sigma^6 + 4\sigma^7 + 5\sigma^8 + u\sigma^9 + v\sigma^{10} \\ &= (34u - 55v - 81)\sigma - 21u + 34v + 51\end{aligned}$$

となり，(4.10)より $\mathrm{pag}(\mathcal{C}_R) = 1$ であるから

$$(34u - 55v - 81)\sigma - 21u + 34v + 51 = 1$$

また，σ は無理数より

$$\begin{cases} 34u - 55v - 81 = 0 \\ -21u + 34v + 51 = 1 \end{cases}$$

となり，これを解くと $u=4, v=1$ を得るが，これは $5 \leq u \leq 6$ に反する．よって，53 個のマスを $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ の 2 つに分けることができないので，$\mathcal{C}_{0,b}$ の配置から c_l, c_r にピンを移動させることはできない．

以上のことから，53 個のピンを配置して，c_l, c_r の 2 つのマスにピンを移動させることはできないので，最小個数は 54 個以上となる．

また，54 個のピンを図 4.3 のように配置すると 4 段目の 2 つのマス c_l, c_r にピンを移動させることができるので，$\mathrm{MS}(4,3)=54$ である．

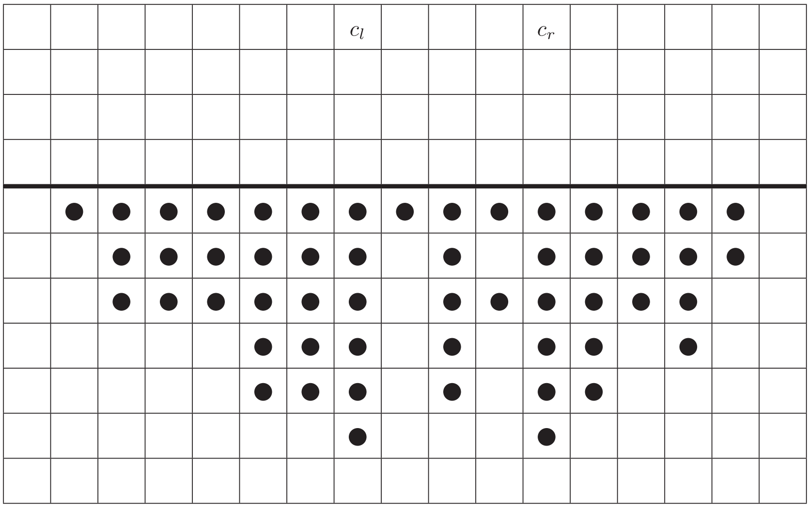


図 4.3　$\mathrm{II}(4,3)$ 型の最小配置

4.5　$\mathrm{II}(4,k)$ 型の最小個数

4.1〜4.4 と定理 2.1 より，$\mathrm{II}(4,k)$ 型について次が成立する．

定理 4.1.

(1) $\mathrm{II}(4,0), \mathrm{II}(4,1)$ 型は不可能であり，$k \geq 2$ の時 $\mathrm{II}(4,k)$ 型は可能である．

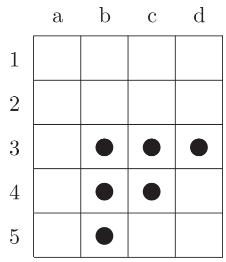
(2) $\mathrm{MS}(4,2)=56,\ \mathrm{MS}(4,3)=54,\ \mathrm{MS}(4,k)=40\ (k \geq 4)$

5　最小配置の手順

ここでは，$\mathrm{II}(n,k)$ 型の最小配置の手順を示す．$\mathrm{II}(1,k)$ 型や $\mathrm{II}(2,k)$ 型など Conway のソリティア・アーミーの最小配置を用いているものについては手順を省略する．(手順は [4] を参照．) また，初期配置を，c_l に移動させるのに用いるピン (○) と c_r に移動させるのに用いるピ

ン (●) の 2 つに分け，c_l, c_r に移動する手順を別々に示す．

手順は次のように表す．まず，盤の行と列にラベルを付け，それらの組み合わせでセルを表すことにする．そして，ピンの移動を，移動するピンのセルと移動先のセルを線 (−) でつないで表す．



この表記法では，上の図において，c3 にあるピンを a3 へ移動させるとき，その移動は c3−a3 で表すことになる．また，同じピンを続けて移動させる場合，例えば b4−d4, d4−d2 は，まとめて b4−d4−d2 と表す．

5.1　II(3, 0) 型と II(3, 1) 型

II(3, 0) 型の最小配置を図 5.1 のように 2 つに分ける．

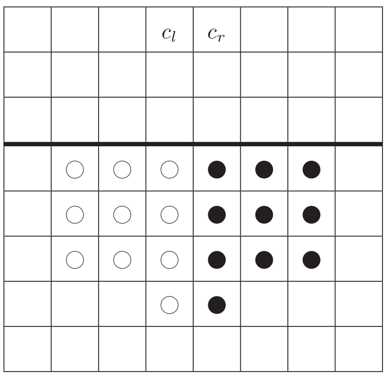


図 5.1

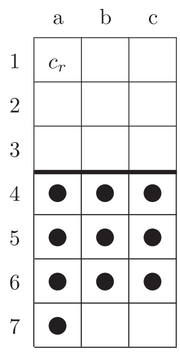


図 5.2

ピンの配置の対称性より，c_r へ移動させる手順だけを示せばよい．そこで，図 5.2 のように行と列にラベルを付け，c_r への手順を示す．

手順 1.

a5−a3, c4−a4−a2, b6−b4, c6−c4−a4, a7−a5−a3−a1

II(3, 1) 型の最小配置は，II(3, 0) 型の最小配置 (図 5.1) のうち，●の部分を 1 つ右に移動させたものであるから手順は手順 1 と同じである．

5.2　II(3, 2) 型

II(3, 2) 型の最小配置を図 5.3 のように 2 つに分ける．

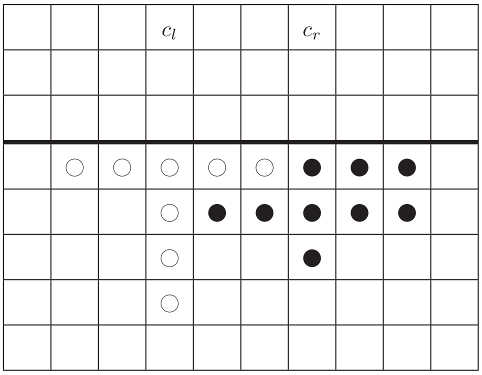


図 5.3

○の配置は Conway のソリティア・アーミーの 3 段目の最小配置であるからその手順は省略し，c_r への移動の手順だけを示す．そこで，図 5.4 のように行と列にラベルをつけ，手順を示す．

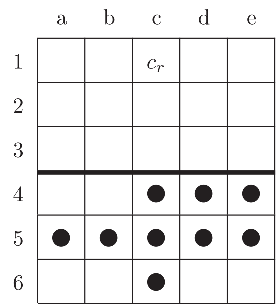


図 5.4

手順 2.

c5−c3, a5−c5, c6−c4−c2, e4−c4, e5−c5−c3−c1

5.3　II(3, 3) 型

II(3, 3) 型の最小配置を図 5.5 のように 2 つに分ける．

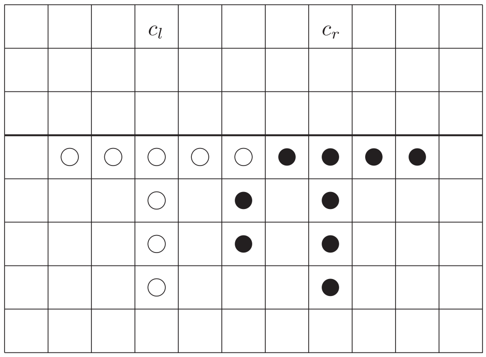
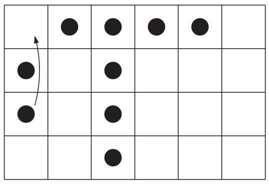


図 5.5

○の配置は Conway のソリティア・アーミーの 3 段目の最小配置であるからその手順は省略する．また，c_r への移動については，最初に次の図のようにピンを移動させると，Conway のソリティア・アーミーの最小配置となるからその後の手順は省く．



5.4　II(4, 2) 型

II(4, 2) 型の最小配置を図 5.6 のように 2 つに分ける．さらに，行と列にラベルを付け，c_l, c_r への移動の手順を順に示す．

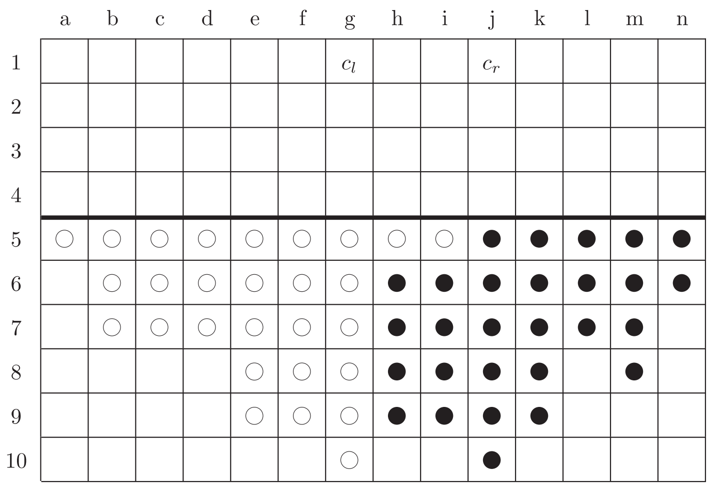


図 5.6

手順 3. (c_l への手順)

g6−g4, i5−g5−g3, e5−g5, g8−g6−g4−g2, c5−e5, a5−c5, b7−b5−d5−f5, d7−d5, c7−c5−e5−g5, e7−g7, g10−g8−g6−g4, e6−g6, e8−g8, e9−g9−g7−g5−g3−g1

手順 4. (c_r への手順)

h7−h5, i7−i5, h9−h7, i9−i7, j6−j4, h5−j5−j3, l5−j5, j8−j6−j4−j2, k7−k5, n5−l5−j5, h7−j7, j10−j8−j6−j4, m6−k6, k9−k7−k5, m8−m6, n6−l6, l7−l5−j5−j3−j1

ここで，c_r への手順 (手順 4) において，4 番目の移動が終わった時点でのピンの配置を図 5.7 に示しておく．

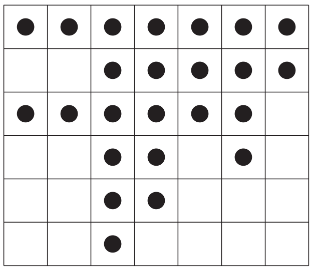


図 5.7

5.5　II(4, 3) 型

II(4, 3) 型の最小配置を図 5.8 のように 2 つに分ける．○の配置は II(4, 2) 型の場合と同じなので c_l への手順は省略し，c_r への手順のみを示す．

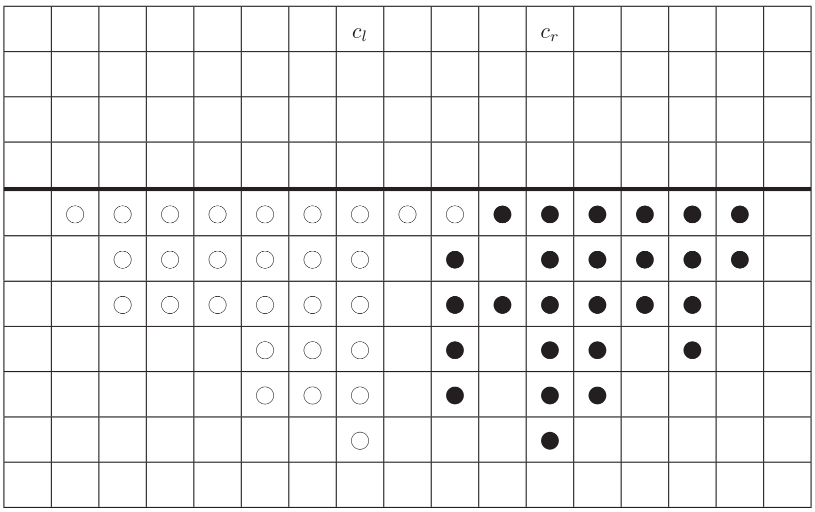
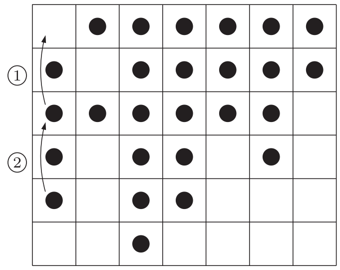


図 5.8

c_r への移動は，次の図のように最初に 2 つのピンを移動させると，II(4, 2) 型の c_r への移動の手順 (手順 4) の 4 番目の移動が終わった状態 (図 5.7) と同じになるので，その後の移動は省略する．



6 おわりに

本論文では Conway のソリティア・アーミーを一般化し，II(n, k) 型についてその初期配置のピンの最小個数とそのときのピンの配置を求めた．その際にパゴダ関数が非常に重要な役割を果たし，論文中では述べなかったが，最小配置を求める際にもピンの配置すべき箇所の限定に利用した．

さらに，今回扱ったパゴダ関数では，ピンの個数が最小の初期配置を $\mathcal{C}_0$, 目的とする配置を $\mathcal{C}_1$ とするとき，$\mathrm{pag}(\mathcal{C}_0) = \mathrm{pag}(\mathcal{C}_1)$ が成立している．II(n, k) 型以外の一般化された Conway のソリティア・アーミーにおいても，最小配置と目的の配置で，関数の値の和が等しくなるようなパゴダ関数の存在が予想される．

本研究において，姉崎宏昭君，粟田幸恵さんには有益なコメントを頂いた．ここに記して感謝の意を表する．

参考文献

[1] G. Bell, D. Hirschberg and P. Guerrero-García, *The minimum size required of a solitaire army*, INTEGERS : Electrical J. of Combinatorial Number Theory, **7**(2007) #G07

[2] E. Berlekamp, J. Conway and R. Guy ,“Winning ways for your mathematical plays”, 2nd ed. vol. 4, A K Peters, 2004

[3] F. Niculescu and R. Niculescu, *Solitaire army and related games*, Mathematical Reports, **8(58)**(2006), 197-217

[4] 秋山 仁・中村 義作 共著, ゲームにひそむ数理, 森北出版, 1998